

Les Transformations du Plan dans l'Enseignement des Mathématiques au Cameroun

Eric Walter NGODEBO

Université De Yaoundé I

Faculté Des Sciences De L'éducation.

Jean Pierre ADJABA

Ministère Des Enseignements Secondaires

Inspection Générale Des Enseignements Secondaires.

Nicolas Gabriel ANDJIGA

École Normale Supérieure De Yaoundé

Département De Mathématiques.

Résumé

Cet article propose une synthèse de l'enseignement et de l'apprentissage des transformations du plan au Cameroun. En s'appuyant sur la démarche d'élaboration des trames conceptuelles d'Astolfi, nous décrivons la structure des trames d'analyse et de niveaux de ce concept. Une étude exploratoire des travaux en mathématiques, en histoire et en didactique de mathématiques, et ainsi que des programmes officiels, nous permet de clarifier la définition institutionnelle des transformations du plan, d'identifier les niveaux scolaires concernés et d'analyser leur progression curriculaire. L'étude met en évidence l'introduction progressive de la symétrie centrale, la symétrie orthogonale, la translation, l'homothétie, la rotation et des similitudes selon trois approches complémentaires : affine, analytique et complexe. L'approche affine est développée de la sixième à la seconde, l'approche analytique en Première et l'approche complexe en Terminale. Bien que cette progression soit clairement structurée, une coexistence des approches est observée en Première et Terminale.

Mots clés : Géométrie des transformations, isométries, transformations, homothéties, programme d'enseignement.

Abstract:

This article provides an overview of the teaching and learning of plane transformations in Cameroon. Drawing on Astolfi's conceptual framework methodology, it describes the analysis and level-based conceptual frameworks associated with this concept. An exploratory review of research in mathematics,

mathematics education, and official curricula was conducted to clarify the institutional definition of plane transformations, identify the school levels at which they are taught, and examine their curricular progression. The study shows that central symmetry, axial symmetry, translation, homothety, rotation, and similarity transformations are introduced progressively through three complementary approaches: affine, analytic, and complex. The affine approach is taught from the first year of lower secondary education to grade 10, the analytic approach in grade 11, and the complex approach in grade 12. Although this progression is well structured, the coexistence of different approaches is observed in the final two years of secondary education.

Keywords: Transformations geometry, isometries, transformations, homotheties, teaching program.

1) Introduction

Les transformations du plan s'inscrivent dans le domaine de la Géométrie qui bénéficie d'un socle théorique stable et partagé, centré sur les *Éléments de Géométrie*¹, contrairement à beaucoup d'autres domaines enseignés comme par exemple les probabilités. Ce concept (les transformations du plan) constitue, de nos jours, un outil majeur sur lequel repose, en grande partie, l'étude de la géométrie. Les transformations du plan trouvent tout leur sens dans la géométrie des transformations, et utilisent *la transformation*² comme fondement théorique. Barbin (2010) et Perrin (2011) relèvent que ce concept arrive dans l'enseignement des mathématiques dès la période des mathématiques modernes et de nouvelles approches (1960-1970), en référence au système euclidien dans le programme d'Erlangen³. Au Cameroun, la géométrie des transformations correspond à une étude des objets, centrée sur les groupes de transformations géométriques ; et à leurs propriétés, indépendamment des figures, considérées comme invariantes. Les transformations du plan sont présentes dans les programmes issus des différentes réformes (1992 et

¹ Les *Éléments de géométrie* d'Euclide constituent de nos jours un document de référence pour les recherches en géométrie, en histoire et en didactique de la géométrie. C'est à partir de ce document que sont nées les idées ayant abouti à la création de diverses géométries que nous connaissons de nos jours.

² La transformation est prise au sens d'une théorie axée sur les notions d'action de groupe et d'invariant.

³ Le programme d'Erlangen ramène l'étude des différentes géométries à celle de leurs groupes de symétries respectifs.

2014)⁴ qu'a connue le système éducatif camerounais. C'est donc un concept qui a résistée aux changements de contenus engendrés par les deux dernières réformes pédagogiques. On les retrouve dans la partie intitulée *géométrie du plan* (MINEDUC, 1992) et dans les programmes actuels (MINESEC, 2014, 2018, 2024). La question de recherche consiste à savoir, comment s'organise l'enseignement des transformations du plan, au regard de leur définition institutionnelle, des notions qui les composent, des connaissances visées et de leurs liens avec les apprentissages antérieurs et ultérieurs ? Cette question est riche d'enjeux. Au-delà de la vérification de l'état d'usure des objets enseignés, de l'appréciation de leur niveau de qualification et des finalités de leur enseignement, elle interroge l'influence des théoriciens sur le choix des objets à enseignés. Elle vise ainsi à évaluer le degré d'adéquation entre les savoirs à enseigner et les savoirs savants relatifs au concept de transformations du plan, ainsi que la qualité d'organisation de leur enseignement. Elle tire son mérite du fait que jusqu'à ce jour, il n'existe pas de travaux décrivant la transposition didactique (Chevallard, 1999) de ce concept dans l'enseignement des mathématiques au Cameroun. En conséquence, nous nous proposons, dans cet article, de décrire comment vit ce concept dans l'enseignement secondaire, en faisant une sorte de bilan en ce qui concerne l'apprentissage de cet objet mathématique très utilisé. Notre objectif est double.

(1) : Identifier les différents niveaux scolaires dans lesquels le concept est abordé afin de relever les recommandations institutionnelles, en ce qui concerne sa transposition didactique.

(2) : Décrire l'évolution de son enseignement tout au long du secondaire, afin de repérer les différentes approches qui sont utilisées et de les graduer de manière à dégager celles qui sont spécifiques à chaque niveau scolaire.

⁴ La réforme de 1992 instituait l'Approche Par des Objectifs (APO) et celle de 2014, l'Approche Par les Compétences (APC).

2) Le contexte de l'étude

Le système éducatif camerounais est constitué de deux sous-systèmes : francophone et anglophone. Le sous-système francophone qui nous intéresse dans cette étude est composée du collège et du lycée. Au collège, on retrouve : le sous-cycle d'observation, comportant les classes de 6^e et 5^e (l'âge des élèves, 11 et 12 ans) et le sous-cycle d'orientation, comportant les classes de 4^e et 3^e (l'âge des élèves, entre 13 et 15 ans). Le lycée quant à lui est composé des classes de seconde, première et terminale (l'âge des élèves, entre 16 et 18 ans). Les nouveaux programmes de ces niveaux scolaires visent l'utilisation de l'Approche Par les Compétences (APC), avec une entrée par des situations de vie. Cette entrée est obligatoire au collège et optionnelle au lycée (MINESEC-IGE, 2018). L'enseignement des mathématiques est centré sur l'apprentissage de nombreux savoirs : savoirs fondamentaux, savoir-être, savoir-faire, savoir-dire, ...etc. Il se fait essentiellement dans l'environnement papier-crayon. L'usage des outils numériques (ordinateurs, logiciels) reste en construction et constitue une perspective. En effet, ces outils restent très peu exploités, nonobstant le fait qu'ils soient visés dans les nouveaux programmes (MINESEC, 2018, 2020, 2022 et 2024). Les objets d'enseignements sont organisés par modules. Les transformations du plan se situent dans le module intitulé « *Configurations et transformations élémentaires du plan* » (programmes du lycée et collège, 1992, 2014, 2018, 2020, 2022, 2024). Ce module s'inscrit dans le domaine de la géométrie du plan qui occupe, dans ces programmes, une place privilégiée.

La géométrie plane occupe une place privilégiée dans le programme de mathématiques, de par les compétences qu'elle vise à développer. Sa contribution au développement de la technologie, de l'art, de la chimie, n'est plus à démontrer ; enfin les innombrables symétries que la nature offre dans la biologie et la physiologie végétale ou animale, font de ce

module un des maillons essentiels dans plus d'un domaine d'apprentissage (MINESEC, 2020, p.14).

Jusqu'en 1991, la notion de transformations du plan est totalement absente dans les programmes de collèges. Avec l'harmonisation des programmes de mathématiques, issue des séminaires de IRMA⁵ (1983, 1985, 1988, 1992) où vingt pays d'Afrique francophone ont adopté les manuels de la Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM) pour le secondaire, les transformations du plan sont devenues des objets mathématiques enseignés dès la classe de sixième. De nos jours, cet enseignement s'étend tout au long du collège et au lycée, essentiellement dans les séries scientifiques (séries C, D, E et TI).

3) Cadrage théorique

Partant du fait que, l'enseignement et l'apprentissage d'un savoir mathématique reposent sur des outils institutionnels qui en organisent sa progression, précisent sa définition, les notions qui le composent, les apprentissages à conduire chez les élèves, ainsi que les tâches associées, nous inscrivons notre étude dans le cadre de la démarche d'élaboration des trames conceptuelles (Astolfi, 1989). Cette théorie est pertinente pour notre recherche à trois égards. Premièrement, elle permet de clarifier les éléments théoriques qui fondent le concept de transformation du plan, et de dégager la progression pédagogique cohérente et planifiée qui structure leur enseignement. Ce qui facilite l'analyse des recommandations institutionnelles relatives à leur transposition didactique. Deuxièmement, elle laisse transparaître un bilan établi par niveau scolaire, du savoir savant, du savoir à enseigner et du savoir enseigné relatifs aux transformations du plan, nous permettant ainsi d'identifier les niveaux où ce concept est introduit et

⁵Les séminaires organisés par l'IRMA (Institut de Recherche en Mathématiques d'Afrique) avaient pour but l'harmonisation des programmes de mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien. Le dernier séminaire de 1992 a abouti à l'élaboration d'une Collection Inter Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire, provoquant ainsi des réformes dans les systèmes éducatifs des différents pays membres.

de ressortir les modalités de sa transposition didactique. Enfin, à travers les outils qu'elle propose, notamment les trames conceptuelles, qui aident les enseignants à traduire les programmes en objets d'enseignement, à articuler les notions constitutives du concept entre elles, à définir les limites selon le niveau scolaire et à préparer leurs séquences d'enseignement, quel que soit le modèle pédagogique adopté, cette théorie nous permet, d'une part, de dégager les structures des différentes trames qui ont été établies pour l'enseignement et l'apprentissage des transformations du plan, au Cameroun. Et, d'autre part, de décrire l'évolution de son enseignement tout au long du secondaire, de repérer les différentes approches qui sont utilisées et de les graduer de manière à dégager celles qui sont spécifiques à chaque niveau scolaire.

Notion de trames conceptuelles

Les trames conceptuelles constituent des outils essentiels pour la conception de l'enseignement et l'apprentissage d'un savoir. Véritables modélisations des réseaux conceptuels, elles permettent de visualiser les concepts, leurs interactions, ainsi que la hiérarchie des notions qui les composent. Elles offrent ainsi au chercheur un cadre d'analyse pour comprendre les conditions de construction d'un savoir scientifique dans un système éducatif ou dans un niveau d'enseignement. L'auteur distingue trois types de trames conceptuelles essentielles pour structurer, et faciliter l'enseignement et l'apprentissage d'un savoir scientifique.

(1) Les trames d'analyse de la matière (ou de savoir savant), sont élaborées en amont d'un projet national d'enseignement de ladite matière. Elles visent à expliciter un savoir enseignable, et à décrire sa structure. Celles-ci mettent en évidence le réseau de savoirs savants retenus pour devenir des savoirs à enseigner.

(2) Les trames de niveaux (ou prévisionnelles d'analyse de la matière à enseigner, à un niveau d'enseignement) décrivent un réseau de

savoirs à enseigner. Élaborées en amont pour décrire des séquences d'enseignement. Elles permettent de construire une progression pédagogique adaptée à un niveau scolaire donné.

(3) Les trames-bilans pour l'enseignant présentent le savoir enseigné tel que conçu par les enseignants. Elles décrivent la progression des notions constitutives d'un savoir au cours d'une séquence d'enseignement, et précisent les démarches à mettre en œuvre en classe afin d'accompagner les élèves dans l'appropriation des connaissances. Élaborées pour un niveau scolaire donné, elles peuvent varier selon les établissements et les pratiques d'enseignants.

Notre recherche consistant à décrire comment vit le concept dans le sous-système éducatif francophone au Cameroun, seules les deux premières trames (de savoir savant et de niveau) sont pertinentes pour cette étude. La troisième étant centrée sur les activités des enseignants et des élèves.

Reformulation de la question de recherche

D'après Astolfi, les trames sont constituées d'énoncés complets, opératoires, et hiérarchisés entre eux, pour décrire les implications logiques entre les contenus de ces énoncés, sans tenir compte de leur succession chronologique dans une progression d'enseignement. Elles analysent et décrivent le contenu enseigné à travers des relations internes, qui relient les notions constitutives d'un même concept, et des relations externes qui relient ce concept à des concepts voisins. Ainsi, envisager l'enseignement ou l'apprentissage des transformations du plan dans le système éducatif camerounais, revient à élaborer des trames d'analyse et de niveaux relatives à ce concept. Et donc, décrire comment vit ce concept dans ce système éducatif ou à un niveau scolaire de ce système, consiste en la relecture de ces trames conceptuelles pour mettre en évidence les fondements qui soutiennent sa compréhension, et décrire les notions qui le constituent. Notre question de recherche se reformule comme suit : comment sont structurées les trames conceptuelles relatives au concept de transformations du plan, dans le sous-système éducatif francophone,

au Cameroun ? Notre recherche vise à identifier les notions constitutives des transformations enseignées et leurs relations, puis analyser leur progression dans le système, en regardant : les définitions institutionnelles données, les objectifs pédagogiques fixés, les connaissances visées et leurs liens avec les apprentissages antérieurs et ultérieurs. L'objectif est d'identifier les transformations enseignées dans chaque niveau scolaire et de les graduer, en mettant en évidence les différentes approches par lesquelles elles sont abordées.

4) Méthodologie de la recherche

Pour décrire la structure des trames d'analyse et de niveaux, relatives au concept de transformations du plan, nous conduisons des enquêtes épistémologiques, des investigations et des lectures succinctes (ou de repérages). Les enquêtes clarifient le concept et précisent ses fondements. Par une lecture de repérage de la théorie sur la géométrie des transformations, nous dégageons la définition du concept. Puis, nous identifions et explicitons les notions de base utilisées pour donner du sens aux énoncés mathématiques (définitions, propriétés, théorèmes, ...etc.) qui fondent l'enseignement des transformations du plan. Les investigations et lectures succinctes permettent de dégager, les différentes transformations enseignées, les prévisions raisonnées des progressions pédagogiques par niveaux scolaires, les moments de structurations conçus et les approches par lesquelles le concept est abordée.

La population et collecte des données

La population étudiée est constituée des trames conceptuelles d'analyse (la géométrie des transformations) et de niveaux (les programmes). La structure de la trame d'analyse est étudiée en appui sur un ensemble de travaux en mathématiques, en histoire et en didactique des mathématiques. Tandis que celle de la trame de niveaux est mise en évidence à travers l'analyse des ressources disponibles dans l'enseignement des mathématiques au Cameroun. Les données

analysées sont : des travaux en mathématiques (Euclide, Traduction de F. Peyrard, 1966 et Traduction de B. Vitrac, 1990 ; Poncelet, 1822 ; Descartes, 1933 ; Bombelli, 1572 ; Lelong-Ferrand, 1942 ; Chasles, 1870, Perrin, 2003, 2011 et 2014), des travaux en histoire et en didactique des mathématiques (Perrin-Glorian, 2024 ; Robert, 2003 ; Barbin, 2010 ; Parzysz, 1989), et des ressources disponibles dans l'enseignement des mathématiques au Cameroun : les manuels (CIAM, 1997 et 2016, Les Majors En Mathématiques, 2020 et 2024, l'Excellence En Mathématiques, 2018 et 2020) ; les programmes et leurs commentaires, de la sixième en terminale (MINEDUC, 1992 et 1998, MINESEC, 2014, 2018, 2020, 2022 et 2024).

5) les Résultats de la recherche et discussion

L'étude montre que les mathématiciens (géomètres) se sont intéressés aux transformations du plan qu'à la fin du XVIII^e siècle, ayant vu en elles de nouveaux outils de démonstration en géométrie (Chasles, 1837). Pour Poncelet (1822), leur enseignement doit viser deux finalités : théorique (comprendre le réel et le théoriser) et pratique (résoudre les problèmes de l'espace sensible). Concrètement, elles doivent être enseignées de manière à permettre l'initiation des élèves au raisonnement déductif et à proposer des modèles dans l'industrie.

5.1-Structure de la trame d'analyse des transformations du plan

5.1.1- Définition du concept de transformation du plan

Une application affine f est une transformation du plan, si f est une bijection du plan ($\mathcal{P}$) vers lui-même. Cela signifie que, tout point M' du plan ($\mathcal{P}$), est l'image d'un unique point M par f . Ou bien que, tout point M' du plan ($\mathcal{P}$) a un, et un seul antécédent par f . Elle peut être considérée comme une bijection d'une partie d'un ensemble géométrique dans lui-même. Dans la pratique, une transformation géométrique consiste à déplacer une figure initiale, ou à en changer les dimensions pour obtenir une figure image.

La construction de cette définition est clarifiée par quatre notions essentielles : application, application bijective, application affine et application affine du plan.

Une application

Soient E et F deux ensembles. On désigne par f la correspondance (ou relation) entre les éléments de E et ceux de F . f est une application, si à tout élément $x \in E$, f associe un élément et un seul $y \in F$. Dans ce cas on écrit : $f: E \rightarrow F$ ou $f: x \mapsto f(x)$, ou encore $f: E \rightarrow F, x \mapsto y = f(x)$. L'ensemble E est appelé ensemble de départ de f , et F l'ensemble d'arrivée. $f(x)$ est appelé l'image de x par f , et x l'antécédent de $y = f(x)$ par f .

Une bijection (ou application bijective)

Une application $f: E \rightarrow F$ est une bijection si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a exactement un antécédant par f qui est dans E . Cette application est dite injective et surjective.

Une application affine

Désignons par $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives E et F (où E et F sont deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$), et considérons une application $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$.

f est une application affine si et seulement s'il existe une application linéaire $\phi: E \rightarrow F$ telle que : $\forall M \in \mathcal{E}, \forall N \in \mathcal{E}, \overrightarrow{f(M)f(N)} = \phi(\overrightarrow{MN})$.

L'application linéaire ϕ est unique et notée $\vec{f}$.

Rappelons qu'une application $g: E \rightarrow F$ est dite $\mathbb{K}$ -linéaire si elle vérifie : $\forall (X, Y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, g(X + Y) = g(X) + g(Y)$ et $g(\lambda X) = \lambda g(X)$.

Ainsi, si nous prenons $O \in \mathcal{E}$, un point fixé, alors $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine si et seulement si l'application $\phi: E \rightarrow F$, définie par $\phi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ est linéaire.

Par ailleurs, si nous prenons $O \in \mathcal{E}$, $O' \in \mathcal{F}$ deux points fixés et $\phi: E \rightarrow F$ une application linéaire, alors l'application $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ définie par : f

$(M) = O' + \phi(\overrightarrow{OM})$ est affine. Dans ce cas f est l'unique application affine d'application linéaire associée ϕ qui transforme O en O' .

Une application affine du plan

Reprenons l'application f définie précédemment. Et désignons par $(\mathcal{P})$ le plan affine euclidien. Considérons également que les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont tels que : $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathcal{P}$. Et prenons M et M' deux points du plan $(\mathcal{P})$. Alors, f est dans ces conditions une application affine du plan que l'on note :

$$f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M' = f(M).$$

Une application affine envoie les droites, les plans et les espaces sur les droites, les plans et les espaces.

5.1.2- Structure de la trame d'analyse du concept de transformations du plan

La structure de la définition du concept de transformations du plan, et celle des définitions des notions qui clarifient ce concept, mettent en évidence les deux aspects qui soutiennent l'élaboration de la trame d'analyse. Premièrement, le concept de transformation du plan est lié aux éléments de la géométrie affine, et à ceux de la géométrie des transformations. Deuxièmement, l'arrière-plan mathématique de la géométrie dans laquelle s'inscrivent les transformations du plan enseignées au secondaire, est constitué d'un système axiomatique construit totalement (ou en partie) à partir des *Éléments de Géométrie* d'Euclide. La présence de ce deuxième aspect se justifie par les travaux de Lelong-Ferrand (1942) dans lesquels, elle décrit le rapport des géométries non euclidiennes (hyperbolique et elliptique) à la géométrie euclidienne :

Après tout, on garde quatre axiomes sur cinq, alors la géométrie hyperbolique reste d'une certaine façon à 80% euclidienne. Et pour le cas de la géométrie elliptique, disons que l'on enlève un axiome de plus, celui de l'infinitude (métrique) des droites, la géométrie elliptique n'est plus qu'à 60% euclidienne (Lelong-Ferrand, 1942, p. 109).

Donc, l’enseignement des transformations du plan doit permettre aux élèves de parfaire l’utilisation des instruments de mesure et de dessin, et conjointement de s’entraîner au raisonnement déductif. Il doit s’appuyer sur les éléments de géométrie affine et sur la notion de transformation, pour évoluer selon le niveau de logique des élèves. L’apprentissage peut partir des constats instrumentés sur les figures pour aller vers les preuves, l’argumentations et la démonstration, en appui sur les propriétés institutionnalisées.

Tableau 1 : Structure de la trame d’analyse des transformations du plan

Les concepts	Les éléments de géométrie affine	La notion de transformation affine du plan
Notions constitutives	-Espace affine -Espace euclidien -Produit scalaire -Norme euclidienne -Espace vectoriel -Sous-espace vectoriel -Notion relatives aux espaces vectoriels -Famille libre ou génératrice - Bases -Application linéaire et bilinéaire -Espace vectoriel euclidien et application linéaire classique.	-Application -Application affine -Application injective, surjective et bijective -Application affine du plan -Notion de transformation -Transformation réciproque -Transformation composée -Ensemble des invariants -Ensemble d’images -Transformations isométriques ou isométries du plan -Transformations non isométriques

La structure de cette trame renvoie à la géométrie des transformations qui définit, les isométries, les homothéties (de rapport différent de 0) et les similitudes comme trois types de transformations du plan, et les regroupe en deux familles de transformations : les transformations isométriques (les translations, les rotations, les symétries centrales et orthogonales, et les symétries glissées) et les transformations non isométriques (les homothéties et les similitudes de rapport différent de -1 et 1). Les éléments de géométrie affine n’étant pas explicitement

définis au secondaire, nous ne présentons que les définitions des notions constitutives des transformations du plan, présentes dans les programmes et manuels du secondaire.

5.1.3- Définition des notions constitutives du concept de transformation du plan

Notre cadre de référence est constitué des programmes (collège et lycée) et des manuels ci-après : Collection Inter Africaine de Mathématiques, Les Majores En Mathématiques et l'Excellence En Mathématiques, de la sixième en terminale.

Transformation réciproque

La transformation réciproque de f , est la transformation du plan qui à tout point M du plan ($\mathcal{P}$) associe cet unique antécédent. Elle est notée f^{-1} .

On a : $f^{-1} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M' \mapsto M = f^{-1}(M')$$

Composée de deux transformations du plan

Soient f et g deux transformations du plan définies de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} & \text{et} \quad g : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \\ M \mapsto M' = f(M) & M \mapsto M' = g(M) \end{array}$$

La composée de g par f est l'application $(f \circ g)$ définie par :

$$\begin{array}{l} f \circ g : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \\ M \mapsto M' = f[g(M)] \end{array}$$

-Si f , g et h sont trois transformations du plan alors, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

-En général $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

Image d'une figure par une transformation du plan

L'image d'une figure par une transformation du plan f est l'ensemble des images de tous les points de cette figure par f . C'est-à-dire, l'ensemble de tous les points de la forme $f(M)$ lorsque M décrit F : $f(F)$

$= \{f(M), M \in F\}$. L'ensemble de tous les points images par f est noté $\text{Im}(f)$.

Points invariants par une transformation du plan

Un point M du plan $(\mathcal{P})$ est dit invariant (ou fixe) par une transformation f , si et seulement si $f(M) = M$. Ainsi, si nous désignons par F un ensemble de points quelconque (il peut s'agir d'une droite, un cercle, un carré, un triangle, ...etc.). Cet ensemble est dit invariant par la transformation f si et seulement si, pour tout point M de F , son image $M' = f(M)$ par f appartient aussi à F . Et donc, F est globalement invariant par la transformation f si et seulement si on a $f(F) = F$. L'ensemble des points invariants par f est noté $\text{Inv}(f)$.

Isométrie du plan

Une isométrie du plan est une application du plan dans le plan qui conserve la distance. Ainsi, si nous prenons, M, N, M' et N' quatre points du plan $(\mathcal{P})$ et $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une application affine telle que : $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$, alors f est une isométrie affine si et seulement si, $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme du plan.

Les propriétés d'une isométrie du plan

- Toute isométrie du plan f est une transformation du plan, c'est-à-dire une bijection du plan dans le plan.
- La réciproque d'une isométrie f est une isométrie du plan notée f^{-1} .
-

Image de figures simples par une isométrie

Toute isométrie f transforme :

- Une droite (D) en une droite (D') , un segment $[MN]$ en un segment $[f(M)f(N)]$, une demi-droite $[MN)$ en une demi-droite $[f(M)f(N))$.
- Un point I milieu d'un segment $[MN]$ en un point $f(I)$ milieu du segment $[f(M)f(N)]$.

- Un cercle (C) de centre O et de rayon r en un cercle (C') de centre $f(O)$ et de même rayon.
- Dans le triangle MNP, l'angle $\widehat{MPN}$ en angle $f(M) \widehat{f(P)} f(N)$ tel que :
 $\widehat{MPN} = f(M) \widehat{f(P)} f(N)$.

Les propriétés de conservation

Toute isométrie f conserve :

- Le produit scalaire : si $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.
- Le barycentre : si $G = \text{bar} \{ (A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \}$ alors $f(G) = \text{bar} \{ (f(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \}$.
- Le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques, les aires des figures fermées.

Homothétie du plan

Une homothétie de centre O est une transformation géométrique du plan qui multiplie la distance par un réel positif $|k|$ appelé rapport de l'homothétie telle que : $h(O) = O$. Ainsi, si nous prenons, M, N, M' et N' des points du plan ($\mathcal{P}$) ; k un nombre réel différent de 0, -1 et de 1 ; et $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une application affine telle que : $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$; alors, f est une homothétie affine si et seulement si, $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = |k| \|\overrightarrow{MN}\|$, et $f(O) = O$ où $\|\cdot\|$ est la norme du plan.

Propriétés d'une homothétie du plan

Soit $h = h_{(O,k)}$ une homothétie de centre O et de rapport k non nul.

M, N, N' et M' des points du plan. Alors : $M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$.

- Les points O, M et $h(M)$ sont alignés.
- Si on a : $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$ alors $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$.
- L'homothétie h est une transformation du plan et sa réciproque est une homothétie notée h^{-1} de même centre et de rapport k^{-1} .

- L'homothétie h conserve : l'alignement, le milieu, le parallélisme, l'orthogonalité, le contact, le barycentre et les angles orientés.
- L'homothétie h multiplie les aires par k^2 .

Ce contenu mathématique qui décrit la savoir savant sur les transformations du plan va permettre l'élaboration des trames de niveaux. Nous décrivons, dans le paragraphe qui suit, la structure générale puis par niveaux de cette deuxième catégorie trame.

5.2-Structure de la trame de niveau du concept de transformations du plan

5.2.1- Structure générale de la trame de niveaux

Des investigations menées dans les programmes et leurs commentaires, de la sixième en terminale (1992, 2014, 2020 et 2024), montrent que les concepteurs s'appuient sur le fait que, les transformations du plan entretiennent des liens étroits avec la réalité, et jouissent d'un statut d'abstraction convoquant la modélisation. Ainsi, l'enseignement et l'apprentissage de ce concept consistent, d'abord à placer les élèves dans des situations d'expérimentation : action sur les objets étudiés, conception et mise en œuvre d'un programme expérimental, description des phénomènes observés et précision du vocabulaire. Et, enfin, le recueil des données. L'apprentissage se fait en appui sur une approche empirique de la réalité, et donc, l'enseignement se construit sur la pratique du dessin avec des actions de construction, et sur les expérimentations, prioritairement dans l'environnement papier/crayon afin de décrire des invariants. Ces programmes proposent une structure des cours dont les enchaînements peuvent se résumer en quelques mots par : la cohérence, la continuité, la régularité, la structuration et la progressivité, rejoignant ainsi les rôles qu'Astolfi (1989) donne à des trames conceptuelles. La cohérence vient du fait que les élèves sont pris dans le même cadre, le sous-système francophone. La continuité, renvoie à un non oubli des notions. Ainsi, selon le niveau d'enseignement, toutes les notions indispensables à une véritable

compréhension du concept, sont abordées. La régularité traduit le fait que d'un niveau à l'autre, et d'une année à l'autre, les notions liées au concept sont travaillées. La structuration renvoie au fait que, l'ordre de succession des notions abordées est tel que : les énoncés nécessaires à la compréhension et à la maîtrise des notions rencontrées dans le concept ont été analysés antérieurement. La progressivité renvoie au sens où le cours proposé est élaboré dans le respect des principes de l'enseignement en spirale. Voici la liste des transformations extraites des programmes, des documents d'accompagnement des programmes, et des manuels du sous-système francophone.

Tableau 2 : Les transformations enseignées dans le sous-système francophone

Transformations Du Plan Enseignées
-Symétrie centrale -Symétrie orthogonale ou réflexion -Translation -Rotation -Identité -Homothétie -Similitude directe -Similitude indirecte -Composée de deux symétries centrales -Composée de deux symétries orthogonales -Composée de deux rotations -Composée de deux translations -Composée de deux homothéties -Composée d'une translation et d'une rotation -Composée d'une translation et d'une symétrie Axiale -Composée d'une translation et d'une homothétie -Composée d'une rotation et d'une homothétie de même Centre

Robert précise qu'il est important de savoir, lors de l'enseignement de la géométrie,

Ce qu'on choisit comme axiomes, ce qu'on choisit comme définitions, ce qu'on peut démontrer et ce qu'on démontre effectivement. Et suivant les choix que l'on fait, certains domaines apparaîtront comme des propriétés ou comme des définitions (Robert, 2003, p. 91).

Elle indique, à travers cette observation, la manière dont les énoncés mathématiques peuvent être désignés sur une trame conceptuelle de bilans, ressortant les notions à aborder et les démarches à suivre dans une séquence d'enseignement, sur les transformations du plan. Ainsi, dans les programmes les énoncés prennent la désignation de : définitions, propriétés et théorèmes, et sont soutenus par des exemples, des contre exemples et des remarques, pour aider les enseignants à mieux structurer l'enseignement du concept, et les élèves à s'approprier les connaissances liées à ce concept.

Les transformations du plan étant considérées comme des outils permettant, grâce à leurs propriétés de résoudre les problèmes de l'espace sensible, et de comprendre le réel et le théoriser, plusieurs objectifs définis dans les programmes sont visés dans leur l'enseignement au Cameroun.

Tableau 3 : Objectifs de l'enseignement des transformations du plan

Objectifs visés
-Découvrir et/ou démontrer les propriétés des objets géométriques du plan -Construire des figures et des points -Classer les objets du plan -Chercher un lieu géométrique -Calculer les longueurs ou les mesures d'angles -Reconnaître les transformations usuelles du plan -Classifier les transformations -Composer deux transformations -Reconnaître une isométrie du plan et classifier les isométries selon certains critères -Décomposer et composer des isométries

Les tableaux 1 et 2 constituant la matrice de la structure générale des trames de niveaux relatives aux transformations du plan, nous la détaillons suivant les différents niveaux scolaires, de manière à observer l'évolution de l'enseignement de ce concept dans l'ensemble du sous-système francophone.

5.2.2- Structure des trames par niveaux d'enseignement

La lecture succincte des programmes (collège et lycée) et de leurs commentaires, nous amène à constater que les transformations du plan sont abordées de façon graduelle et progressive, suivant les sous-cycles et les niveaux d'enseignement.

- **Sous-cycle d'observation**

Le programme du sous-cycle d'observation met, en arrière-plan mathématique de la géométrie enseignée, l'axiomatique d'Euclide. Ils situent le travail mathématique dans la géométrie pratique (Robert, 2003) ou instrumentée (Perrin-Glorian, 2024). Bien que l'on continue de s'interroger sur ce qu'on voit, leur objectif est de pousser les élèves à utiliser les instruments qui matérialisent les propriétés. Deux transformations du plan sont enseignées : la symétrie centrale et orthogonale. Cet enseignement est centré sur la reconnaissance d'une forme (ou d'un objet), d'une relation ou d'une propriété géométrique, transformée à l'aide des instruments. Cependant, les termes « application », « isométrie » et « transformation » ne sont pas du tout employés. Le terme « symétrie » n'est employé que pour indiquer le nom du savoir à enseigner. Les deux chapitres portent les titres suivants : « *figures symétriques par rapport à un point* » et « *figures symétriques par rapport à une droite* ». Ceci pour désigner les symétries centrale et axiale (ou orthogonale). Les propriétés de conservation de distances des isométries sont enseignées et exploitées à l'aide des instruments, du mesurage et en convoquant parfois

d'autres propriétés admises. Ici, une propriété n'est vraie, que lorsqu'on peut la contrôler avec un instrument.

- **Sous-cycle d'orientation**

Dans le sous-cycle d'orientation (programmes, 1992, 2018 et 2024), on reste dans la géométrie euclidienne. Cependant, on constate une rupture avec la géométrie pratiquée au cycle d'observation. Bien que le travail mathématique puisse commencer par l'exploitation des instruments, les programmes amènent les élèves à travailler dans la géométrie déductive. Ici, l'on interroge ce qu'on établit ou bien ce qu'on démontre. La notion d'application est explicitée ; la symétrie orthogonale, la symétrie centrale et la translation sont définies à partir de leurs propriétés respectives. Ces transformations sont vues comme des applications du plan. En classe de Quatrième, l'accent est mis sur l'étude de la translation. Le but est de la reconnaître et d'utiliser ses propriétés pour justifier le parallélisme, l'orthogonalité, une égalité de distance ou une égalité angulaire. En troisième, on étudie les homothéties. On s'intéresse à leurs éléments caractéristiques, en se limitant dans les applications, à des valeurs simples et positives, pour ce qui est du rapport. Le but est de dégager les propriétés d'agrandissement et de réduction pour commencer à marquer la différence avec une translation, une symétrie centrale et une symétrie orthogonale. Les termes « isométrie » et « transformation » ne sont pas employés dans ces programmes.

- **Au lycée**

Les programmes de lycée (1992, 2018, 2020, 2022, 2024) gardent l'axiomatique d'Euclide en arrière-plan mathématique de la géométrie enseignée. Cette géométrie est essentiellement déductive. Les objets sont définis à travers leurs propriétés, bien qu'on puisse les dessiner pour les visualiser et faire des conjectures. N'est vrai ici que ce que l'on démontre.

En Seconde, le chapitre est intitulée « transformation du plan ». Le terme « isométrie » n'est toujours pas utilisé à ce niveau

(programmes de 1992, 2020 et 2024). On réinvestit les propriétés des symétries centrales et orthogonales, des translations, ainsi que celles des homothéties qui sont présentées comme des transformations du plan, sans que la notion de « transformation » ne soit explicitement définie. On introduit la rotation du plan qui est définie à partir de ses propriétés caractéristiques (conservation de distances et d'angles). L'accent est mis sur les éléments caractéristiques (angle et centre) de cette transformation. L'étude vise à amener les élèves à mobiliser les propriétés de ces transformations du plan pour résoudre des problèmes de construction, de recherche de lieux géométriques, de chemin minimum, d'alignement des points, et de positions des droites.

En Première, le chapitre est intitulé « transformation affine du plan » (programme de 1992, 2022 et 2024), il s'agit d'une sorte de bilan sur l'étude de toutes les transformations du plan, vues depuis la classe de Sixième. Une étude comparative est menée, visant à distinguer les isométries des homothéties, à travers les propriétés de conservation de distances et d'angles. Les notions de transformations du plan et d'isométries sont clairement définies. Le travail se focalise sur deux points essentiels : le premier consiste en l'étude de la composée de deux isométries, de la composée de deux homothéties, et de la composée d'une isométrie et d'une homothétie ; le second consiste en l'étude de toutes ces transformations du plan à partir de leurs expressions analytiques dans un repère donné. Ici, il s'agit spécifiquement de montrer d'abord qu'une application du plan dans lui-même est une transformation, ensuite qu'une application d'expression analytique connue est une transformation du plan, et enfin de définir analytiquement sa réciproque. Cette étude vise par ailleurs à dégager les expressions analytiques des transformations du plan usuelles. Ceci dans le but de déterminer l'expression analytique d'une composée de deux transformations quelconques données du plan. L'objectif principal est d'amener les élèves à résoudre les problèmes de construction, de démonstration des propriétés, de calcul d'aires et de volumes, de classification d'isométries, de composition et de décomposition d'isométries et de lieux géométriques. Cette

résolution doit s'effectuer en utilisant, soit les expressions analytiques, soit les points ou les vecteurs du plan.

En Terminale, le chapitre est intitulé « Similitudes directes du plan » (programmes de 1992, 2022, 2024). Il s'agit d'étudier la composée d'une homothétie et d'une isométrie, qui n'était pas un objectif central en Première. Dans cette étude, on revient sur les différentes transformations du plan vues dans les classes antérieures pour déterminer leurs écritures complexes. Le but est d'étudier les transformations du plan avec les nombres complexes. On se focalise sur la similitude du plan, vue comme composée d'une isométrie et d'une homothétie, en dégagant ses éléments caractéristiques et en étudiant ses différentes propriétés. Tout ceci dans le but de résoudre les problèmes de construction, de déterminer certains lieux géométriques et de démonstration des propriétés, en utilisant soit les expressions analytiques, soit les expressions complexes, soit les points ou les vecteurs du plan. Tout ce travail géométrique s'effectue dans l'environnement papier-crayon.

Ces transformations sont abordées à chaque niveau scolaire selon une approche qui prend en compte, le niveau de logique (naturelle et formelle), de preuve et de validation à installer pour développer la culture mathématique, chez les élèves.

5.3-Les approches utilisées dans l'enseignement des transformations du plan

Les programmes de mathématiques de collège (1992, 2014, 2018 et 2024) et ceux de la classe de seconde (1992, 2020, 2022 et 2024) amorcent, au départ, le concept de transformations du plan de façon intuitive, en considérant la réalité et le sensible comme sources de validation. La déduction s'y exerce prioritairement sur des objets matériels, à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. Le pliage, le calque et la construction sont alors utilisés comme des moyens de contrôles. À la fin, par une approche par des points du plan que nous désignons par « approche affine ». Cette approche propose une étude des transformations du plan selon une entrée par des points

d'un même plan. Dans cette approche, un vecteur est obtenu à partir de deux points donnés. Un ensemble est défini comme la donnée de plusieurs points vérifiant certaines propriétés. Des propriétés spécifiques permettant de parler d'alignement, de parallélisme et de perpendicularité, définissent des ensembles des points. Ainsi, une longueur est une distance entre deux points, et un angle est défini à partir de trois points. Et donc, une transformation du plan est définie comme une correspondance entre deux points d'un même plan donné. L'image d'un point est donc construite par retournement, avec ou sans glissement. Ainsi, on obtient les propriétés d'une configuration image par conservation de ses propriétés sur la configuration initiale. Partant du point de vue de Descartes, selon lequel :

Un point, dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ convenablement choisi, peut être déterminé par un couple de coordonnées (x, y) (Descartes, 1933),

Les programmes définissent une transformation du plan en donnant, pour chaque point quelconque M de coordonnées (x, y) , les coordonnées (x', y') de son image, un point M' , pour définir l'approche par les expressions analytiques que nous désignons par « approche analytique ». L'approche analytique des transformations du plan est présente dans les programmes de la classe de Première (1992, 2018, 2022 et 2024). Elle cohabite avec l'approche affine, et étudie une transformation du plan à partir de son expression analytique. Une transformation est définie comme une correspondance entre les coordonnées de deux points dans un repère préalablement choisi. Elle met en relation les coordonnées d'un point image et celles de son antécédent par une transformation du plan. Ici un ensemble de points est défini par une expression qui met en relation l'abscisse et l'ordonnée d'un point situé sur cet ensemble. Une longueur (ou distance) est la racine carrée de la somme des carrés de la différence entre les abscisses et entre les ordonnées de deux points.

Par ailleurs, le programme associe le plan affine à un plan complexe, et le munit d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Ainsi, on détermine un point M de coordonnées (x, y) par son affixe $z = x +$

i y, pour définir une transformation du plan, en donnant pour chaque point M d'affixe z , l'affixe z' de son image, le point M' , définissant ainsi l'approche que nous désignons par « approche complexe ». L'approche complexe est introduite dans les programmes de Terminale (1992, 2022, 2024). Dans ces programmes, cette approche cohabite avec les deux approches précédentes. L'approche par les nombres complexes, étudie une transformation du plan à partir de son expression complexe. Cette expression met en relation les affixes de deux points dans un plan complexe. Les points du plan sont définis dans un plan complexe à partir de leurs affixes. Un ensemble est défini par une expression mettant en relation les affixes des points appartenant à cet ensemble. Une transformation est définie comme une correspondance entre l'affixe z' d'un point image M' et celui de son antécédent z de M . Les angles, le parallélisme, l'orthogonalité et l'égalité sont bien définis. Une longueur (ou distance) est la valeur absolue de la différence entre les affixes de deux points du plan complexe.

6) Conclusion

Notre objectif était de décrire comment vit le concept de transformations du plan dans l'enseignement des mathématiques au Cameroun. En appui sur la démarche d'élaboration des trames conceptuelles (Astolfi, 1989), nous avons ramené cet objectif à la description de la structure des trames d'analyse et de niveaux, nous permettant ainsi d'avoir une photographie de ce qui est fait concernant l'enseignement et l'apprentissage de ce concept. Correspondant à la géométrie des transformations, la trame d'analyse a mis en évidence deux concepts structurants : les éléments de la géométrie des transformations et la notion de transformations affines. Partant des étapes d'élaboration de cette trame, nous avons identifié les éléments susceptibles de clarifier la définition institutionnelle du concept de transformation du plan, et dégagé les notions liées à ce concept, en nous intéressant à celles qui sont enseignées. Les programmes ayant

été identifiés comme des trames de niveaux, leurs structures ont été mises en évidence à travers des lectures succinctes et des enquêtes exploratoires des travaux en mathématiques, en histoire et en didactique de mathématiques, et dans les ressources disponibles dans l'enseignement des mathématiques (les programmes, les accompagnements des programmes et manuels), au Cameroun. Il en résulte que la réforme de 1992 a introduit les transformations du plan dans l'enseignement des mathématiques au Cameroun, dès la classe de Sixième. Cet enseignement s'étend de nos jours, tout au long du cycle secondaire, et se fait de façon progressive. Trois approches sont alors utilisées : l'approche affine (par les points et les vecteurs du plan), l'approche analytique (par les expressions analytiques) et l'approche complexe (par les nombres complexes). Par une approche affine, on commence par les symétries centrales et orthogonales au sous-cycle d'observation ; ensuite, les translations et les homothéties au sous-cycle d'orientation ; et enfin, les rotations dans la classe de Seconde. L'approche analytique est introduite en classe de Première, où elle cohabite avec l'approche affine. Ainsi, un bilan sur l'étude des transformations du plan, menée tout au long du collège et en classe de Seconde est fait, à travers une approche affine. Ce bilan vise à établir, d'une part la composition, la classification et la décomposition de ces différentes applications ; et d'autre part, la distinction entre les transformations isométriques et les transformations non isométriques. L'approche par les expressions analytiques, constituant l'élément central dans l'étude de ces transformations, la reconnaissance d'une transformation du plan peut être faite à partir de son expression analytique. On peut ainsi écrire l'expression analytique d'une transformation, ainsi que celle de sa réciproque, et puis déterminer l'expression analytique de la composée de deux transformations. En Terminale, c'est l'approche par les nombres complexes qui est introduite. Cependant, on observe une cohabitation des trois approches (affine, analytique et complexe), puisqu'on essaie, à partir des points du plan, de passer à l'écriture vectorielle d'une transformation, à l'écriture analytique, et ensuite à l'écriture complexe et vice-versa. Les transformations du plan sont déterminées à partir de leurs

expressions complexes. À ce niveau scolaire, on détermine l'écriture complexe de la composée de deux transformations, particulièrement celle d'une similitude. Et, on étudie leurs propriétés. Cependant, les transformations du plan constituent un outil de résolution de problèmes géométriques. Elles sont utilisées pour résoudre plusieurs catégories de problèmes géométriques : les problèmes de lieux géométriques, les problèmes de calculs d'aires et de volumes, les problèmes de démonstration des propriétés, les problèmes de construction...etc. Ces résultats mettent en évidence une adéquation réelle entre les savoirs à enseigner, et les savoirs savants relatifs aux transformations du plan. La structure de la trame d'analyse établit une influence réelle des théoriciens dans le choix des objets enseignés. Celles des trames de niveaux traduisent une bonne organisation de l'enseignement des transformations du plan. Toutefois, l'absence (ou la faible) d'utilisation des outils numériques montre que les pédagogies adoptées ne sont pas arrimées aux innovations technologiques (dominantes ou à la mode) qui guident l'enseignement des mathématiques dans les systèmes éducatifs modernes. La recherche plaide pour une élévation du niveau de qualification, au-delà de la diversification des finalités d'enseignement de ce concept. Et, pour l'évolution des contenus, exposés à l'usure des objets enseignés. Usure dû à l'avancé des recherches en mathématiques. Une étude sur l'usage des outils numériques dans l'enseignement de ce concept au Cameroun prolongerait cette recherche. Elle permettrait d'évaluer le niveau d'adaptation de ce système éducatif aux nouvelles technologies de l'éducation.

Bibliographie

ASTOLFI Jean-Pierre et DEVELAY Michel, 1989. *La didactique des sciences. Que sais-je ?* N°2448, Paris, PUF.

BARBIN Évelyne, 2010. La réforme des mathématiques modernes et l'APMEP, conférence à Nante à l'occasion des 100 ans de l'APMEP.

BOMBELLI Rafael, 1572. *L'algebra opera*, con Licentia Delli RR. VV. del V.

CHASLES Michel, 1870. *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Imprimerie nationale, Paris.

CHEVALLARD Yves, 1999. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactiques Des Mathématiques*, 19(2), pp 221-266.

DESCARTES René, 1933. La géométrie analytique, Cité dans, quelques réflexions sur Descartes et les mathématiques, Charbonneau, L. (1995), *Philosophique*, vol XXII, USA, pp 353-369.

EUCLIDE, 1966. *Les Éléments* (Trad. F. Peyrard). Paris : PUF / CNRS Éditions.

EUCLIDE, 1990. *Les Éléments* (Trad. et commentaires, B. Vitrac). Paris : CNRS Éditions.

LELONG-FERRAND Jacqueline, 1942. Les fondements de la géométrie, Texte imprimé, Presses Universitaires de France, Impr. En Italie.

MINEDUC, 1992. Programme officiel de mathématiques du premier et second cycle de l'enseignement général. Arrêté 53/D/23/MINEDUC/IGP/ESG.

MINEDUC, 1998. Programme officiel de mathématiques du premier et second cycle de l'enseignement général. Arrêté 67/D/37/MINEDUC/IGP/ESG.

MINESEC, 2014. Programme officiel de mathématiques du premier cycle de l'enseignement général. Arrêté 108/D/89/MINEDUC/IGP/ESG.

MINESEC, 2018. Programme officiel de mathématiques du second cycle de l'enseignement général. Arrêté 301/D/62/MINEDUC/IGP/ESG.

MINESEC, 2020. Programme officiel de mathématiques du premier et second cycle de l'enseignement général. Arrêté 607/D/37/MINEDUC/IGP/ESG.

MINESEC, 2022. Programme officiel de mathématiques du second cycle de l'enseignement général. Arrêté 01/D/99/MINEDUC/IGP/ESG.

MINESEC, 2024. Programme officiel de mathématiques du premier et second cycle de l'enseignement général. Arrêté 709/D/77/MINEDUC/IGP/ESG.

MVOMO, A., BONGWENI Joseph, ETOA Yves, AYOMBA Mélanie, MELELE Judith, 2024. *Les Majors en Mathématiques*, classe de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e, 2nde C, 1^{ère} (C, D, TI) et Tle (C, D, E et TI), ASVA EDUCATION.

PARZYSZ Bernard, 1989. Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée : contribution à l'étude de la relation voir/savoir (Thèse de doctorat). Université Paris.

PERRIN Daniel, 2014. Géométrie projective plane et application au géométries euclidienne et non euclidienne. Revue Tangente N° 162.

PERRIN Daniel, 2011. Les mathématiques d'école, nombres, mesures et géométrie. Bulletin de l'APMEP N° 462.

PERRIN Daniel, 2003. Quels outils pour la géométrie à l'âge du collège. Repères-IREM, N° 53, pp 91-110.

PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne, 2024. Enseigner la géométrie plane en cohérence de 6 à 15 ans, Rematec, N° 48.

PONCELET Jean Victor, 1822. Traité des propriétés projectives des figures, Bachelier, Paris.

SALIOU Touré, BAYE Omar, AKELE Christophe, BENDIMAN Miandom, CONDE Kémo, DJIGUIBA Oumar, DON Patrice, NEULAT Jean Luc, TRAORE Samo, 1997. *Collection Inter Africaine De Mathématiques (CIAM)*, Classe de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e, 2nde C, 1^{ère} (C, D, E et TI) et Tle (C, D, E et TI), EDICEF.

TEGNINKO, V., SIELINOU, D., BOUDA, A., POKAM, R., BOUDY, R. (2017). *L'Excellence En Mathématiques*, Classe de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e, 2nde, 1^{ère} et Tle, NM EDUCATION.