LES MATHEMATIQUES AU SERVICE DES SCIENCES PHYSIQUES : EXEMPLE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DANS LE PROGRAMME SENEGALAIS DE PHYSIQUE DE TERMINALE SCIENTIFIQUE

Moustapha THIAM
Docteur en Physique
Inspecteur de l'Enseignement Moyen Secondaire/ Physique – Chimie
Inspection d'Académie de Saint Louis/ Sénégal
m.thiamphysics@hotmail.fr
Abdou DIOUF
Docteur en Mathématiques
Inspecteur de l'Enseignement Moyen Secondaire/ Mathématiques
Inspection d'Académie de Fatick/ Sénégal
Djibril FALL
Professeur d'Enseignement Secondaire de Sciences Physiques
Institution Sainte Jeanne d'Arc de Dakar/ Sénégal

Résumé

Cette étude dont le point d'ancrage est la didactique des sciences et des mathématiques, s'intéresse particulièrement à l'interdisciplinarité mathématiques-physique. Elle porte sur les équations différentielles en tant que pont entre les programmes sénégalais de mathématiques et de physique de niveau terminal scientifique. Tout d'abord, nous avons fait le point sur les attendus des programmes. Les objectifs d'apprentissages sur les équations différentielles dans le référentiel de programme de mathématiques et sur les chapitres de physique faisant intervenir les équations différentielles ont été rappelés. Ensuite, une présentation a été faite sur la notion d'équations différentielles dans le cadre des mathématiques. Quelques exemples de leurs applications en physique ont été illustrées. Enfin, des propositions basées sur l'interdisciplinarité et, allant dans le sens de l'amélioration des enseignements-apprentissages des équations différentielles et des phénomènes physiques dont l'évolution est régie par celles-ci ont été formulées.

***Mots-clés** : Equations différentielles, interdisciplinarité mathématiques-physique.*

ISBN : 978-2-493659-12- 5   COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE   VOL 4 N ° 12 Juin 2025

Abstract

This study, which is anchored in the didactics of sciences and mathematics, is particularly interested in the interdisciplinarity of mathematics and physics. It focuses on differential equations as a bridge between the Senegalese curricula of mathematics and physics at the scientific terminal level. First of all, we reviewed the expectations of the programmes. The learning objectives on differential equations in the mathematics programme framework and on the chapters of physics involving differential equations were recalled. Then, a presentation was made on the concept of differential equations in the context mathematics. Some examples of their applications in physics were illustrated. Finally, proposals based on interdisciplinarity, aimed at improving the teaching and learning of differential equations and the physical phenomena whose evolution is governed by them, were formulated.
***Keywords**: Differential Equations, Interdisciplinarity Mathematics-physics.*

Introduction

Les disciplines scientifiques, peu nombreuses encore au début du XX^{e} siècle se sont vu adjoindre de nouvelles disciplines pour dépasser assez rapidement la centaine. La multiplication des découvertes a abouti à une subdivision des sciences car il devenait impossible pour une même personne de maitriser tout le savoir de l'époque. (Roegiers, 2001, p 28-29) Malgré cette prolifération des champs de savoir, certaines disciplines continuent d'entretenir des relations très intimes. C'est le cas des mathématiques et de la physique qui, depuis toujours, maintiennent des rapports symbiotiques sur le plan épistémologique et sur le plan didactique. Les mathématiques et la physique partagent de nombreux objets d'enseignement. Il s'agit de notions et de contenus : nombres, grandeurs, proportionnalité. Il s'agit aussi de démarches : investigation, modélisation, etc. Il s'agit encore de compétences : représentation, calcul, raisonnement ou même recherche. (Robine, 2017) Le terme physique-mathématiques est de plus en

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

plus utilisé. Il s'agit d'un domaine se situant à l'intersection des mathématiques et de la physique. Son objectif principal est d'utiliser les mathématiques pour résoudre des problèmes de physique spécifiques mais aussi de développer des modèles mathématiques précis et rigoureux pour décrire les phénomènes physiques observés dans le monde réel. De ce point de vue, les mathématiques peuvent être considérées comme modèles de phénomènes physiques. A la question philosophique de savoir : « Peut-on faire de la physique sans les mathématiques ? », historiquement, plusieurs réponses ont été apportées. La réponse platonicienne (~ - 400), essentialiste : « *les mathématiques sont nécessaires en physique car le monde est intrinsèquement mathématique* » ; la réponse galiléenne (1623 ; 1632) : « *les mathématiques sont si efficaces en physique car le monde physique et le monde mathématique sont très proches* (*close homogeneity*) » ; la réponse de Berkley (1710), pragmatique : « *les mathématiques sont un bon outil pour la physique* » ; la réponse kantienne (1787), cognitiviste : « *nous comprenons le monde mathématiquement, c'est grâce aux concepts mathématiques que nous pouvons nous forger une représentation des objets dont nous n'avons pas une expérience directe* ». (Boniolo et al, 2005)

En didactique des sciences, l'activité du physicien est décrite comme une activité de modélisation, avec des va-et-vient entre le monde physique et des représentations mathématiques (Bunge, 1973, Bing & Redish 2009). Les mathématiques permettent de formaliser les phénomènes physiques pendant que la physique donne du sens aux abstractions mathématiques. Parmi les outils mathématiques de la physique, les équations différentielles, une notion qui vit depuis presque quatre siècles et qui assume remarquablement le rôle de modèle pour l'étude de très nombreux phénomènes physiques (Saglam, 2004), occupent une place centrale. Dans les programmes d'étude sénégalais, les équations différentielles sont abordées en

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

mathématiques en classe de Terminale scientifique. Dans le programme de physique de Terminale scientifique également, un bon nombre des lois étudiées se présentent sous forme d'équations différentielles. Cette forte intrication des savoirs mathématiques dans le programme de physique ne manque pas de soulever des enjeux épistémologiques, didactiques et pédagogiques ? Comment exploiter alors le potentiel interdisciplinaire entre mathématiques et physique à travers les équations différentielles pour permettre une meilleure appropriation des savoirs par les élèves ?

Cette étude vise à mettre en exergue le rôle des équations différentielles en tant qu'outil mathématique puissant dans l'exécution du programme de physique de terminale scientifique sénégalais et combien une intégration interdisciplinaire est nécessaire pour optimiser les enseignements-apprentissages dans les deux disciplines. Nous examinerons d'abord les programmes scolaires pour voir s'ils sont favorables à une approche interdisciplinaire ou s'ils cloisonnent les enseignements-apprentissages. Nous présenterons ensuite les équations différentielles dans le contexte mathématique et nous illustrerons quelques-unes de leurs applications à travers des exemples concrets de phénomènes physiques extraits du programme sénégalais de niveau terminal scientifique. Enfin, des pistes pouvant permettre de rendre plus efficace les enseignements-apprentissages des équations différentielles dans les deux disciplines, en mettant à contribution l'interdisciplinarité mathématiques-physique seront proposées.

1. Ce que disent les programmes

1.1. Le programme de mathématiques

Les programmes de mathématiques sont présentés dans un tableau avec trois colonnes. Une première colonne où sont listés les contenus, une deuxième avec des commentaires et une

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

troisième où on retrouve les compétences exigibles. En Terminales S2 et S4, classes à vocation scientifique tournée vers les sciences expérimentales il est précisé que « *de nombreux concepts mathématiques seront utilisés dans les autres disciplines particulièrement en sciences physiques. Ce sera l'occasion au travers d'une collaboration interdisciplinaire de décloisonner l'enseignement*. » Les contenus à enseignés sont : Equation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants : existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée ; Equation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants : existence et unicité (admises) de la solution vérifiant des conditions initiales données ; Equation différentielle linéaire du premier et du second ordre à coefficients constants avec second membre. On y ajoute en commentaire qu' « *Aucune théorie générale ne sera faite, l'objectif de cette partie est de savoir résoudre les équations différentielles. L'utilisation des équations différentielles en sciences physiques est un champ intéressant pour la recherche d'activités préparatoires ou d'exercices.* » En Terminales S1 et S3, classes à vocation scientifique orientée vers les sciences exactes et la technologie, l'enseignement des équations porte sur les contenus suivants : Résolution de l'équation homogène du premier ordre ; Résolution de l'équation homogène du second ordre : recherche de solutions à l'aide de l'équation caractéristique ; Exemple de résolution d'une équation différentielle linéaire avec second membre du premier ordre à coefficients constants ; Exemples de résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec un second membre de la forme : $A \cos \alpha t + B \sin \alpha t$. Comme en TS2 et TS4, en commentaire, le lien avec la physique pour une approche interdisciplinaire est mentionné comme suit : « *En relation avec l'enseignement des sciences physiques (mécanique du point, circuits électriques, on étudiera quelques exemples simples satisfaisant à une loi*

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

d'évolution et à une condition initiale, afin de mettre en évidence certains phénomènes physiques (amortissement, oscillation). » (MEN, 2006)

1.2. Le programme de physique

Dans le programme des classes de Terminales scientifiques (quasiment le même en TS1, TS2, TS3 et TS4), les équations différentielles sont présentes pratiquement dans toutes les parties. En mécanique, on les retrouve dès le premier chapitre en cinématique avec les mouvements sinusoïdaux, définis à partir de fonctions solutions d'équations différentielles. En établissant la relation entre l'accélération et la variable de position (fonction solution), on obtient l'équation différentielle correspondante. Ensuite en dynamique, surtout avec les oscillations mécaniques, on retrouve les mouvements sinusoïdaux mais cette fois-ci les équations différentielles sont établies suite à l'application de la deuxième loi de Newton. En électricité, l'évolution des circuits (R,L), (R,C), (R,L,C) est régie par des équations différentielles. Là également, on applique la loi d'additivité des tensions qui aboutit à une équation différentielle. Enfin, en physique nucléaire, les équations différentielles interviennent dans l'étude du phénomène de désintégration radioactive. Le programme de sciences physiques se présente sous forme de tableau suivi de commentaires. Dans le tableau, on a une première colonne où sont listés les objectifs d'apprentissage, une deuxième avec les contenus et une dernière pour les activités d'apprentissage. Dans les objectifs d'apprentissage, il n'est pas formellement demandé de procéder à la résolution d'équations différentielles, celle-ci devant être prise en charge par le cours de mathématiques. Généralement, on attend de l'élève pour un problème donné, qu'il puisse, par application d'une loi de la physique, établir l'équation différentielle associée. Ensuite il donne la forme de la solution sans démonstration. Ou bien encore, et c'est le cas le plus fréquent, après avoir établi l'équation, une fonction lui est présentée et il lui est demandé de vérifier que

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

cette fonction est solution de l'équation en question. Néanmoins le professeur de sciences physiques est appelé à prendre en charge lui-même certains prérequis d'ordre mathématique, surtout s'ils ne sont pas encore traités dans le cours de mathématiques à cause des décalages qui peuvent arriver dans les progressions entre les deux disciplines. Par exemple, pour le chapitre sur la cinématique, on lit en commentaire : « *Au fur et à mesure du déroulement de la leçon le professeur veillera à apporter les compléments mathématiques utiles (notions de dérivée et primitive) à partir d'exemples simples*. » Pour le chapitre sur les oscillations électriques également, il est mentionné dans les commentaires : « *A partir de l'additivité des tensions, établir l'équation différentielle de cette décharge :* $L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0$. *Etablir la solution de l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales. On déterminera la période propre T_0 et la pulsation propre ω_0.* » Pour l'équation : $L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$, il est précisé que la résolution est hors programme. (MEN, 2008)

Cet aperçu des programmes illustre l'importance des équations différentielles aussi bien en mathématiques qu'en physique. Il montre également combien les équations différentielles constituent-elles un pont didactique entre les mathématiques et la physique. Il est à noter également que, du point de vue institutionnel, l'approche interdisciplinaire est bien une recommandation.

2. Les équations différentielles en mathématiques

2.1. Notion d'équations différentielles

Soit la fonction $f\,:\,x\;\mapsto\;e^{4x}$.

On se propose de calculer la dérivée f' de f et de monter que, pour tout nombre réel x, on a : $f'(x)-4f(x)=0$.

On a $f'(x)=4e^{4x}$ et $f'(x)-4f(x)=4e^{4x}-4e^{4x}=0$

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est liée à sa dérivée f' par la relation : $f' - 4f = 0$.
Un autre exemple : On donne la fonction $g : x \mapsto sin5x$
On calcule la dérivée g'' de g et on montre que, pour tout nombre réel x, on a : $g''(x) + 25g(x) = 0$.
On a $g'(x) = 5cos5x$ et $g''(x) = -25sin5x$
alors $g''(x) + 25g(x) = -25sin5x + 25sin5x = 0$. Soit la relation $g'' + 25g = 0$.
Par définition, une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives est appelée **équation différentielle**. La fonction inconnue est souvent notée $\boldsymbol{y}$ et ses dérivées successives $\boldsymbol{y'}$, $\boldsymbol{y''}$, $\boldsymbol{y'''}$, …
Une équation différentielle est dite d'ordre $\boldsymbol{n}$ lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est $\boldsymbol{n}$.
Exemples : $f' - 4f = 0$ est une équation différentielle du premier ordre ; $g'' + 25g = 0$ est une équation différentielle du second ordre.
Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle ouvert $\boldsymbol{K}$ est appelée **solution** ou **intégrale** sur $\boldsymbol{K}$ de cette équation.
Exemples : $f(x) = e^{4x}$ est solution de l'équation $y' - 4y = 0$; $g(x) = sin5x$ est solution de l'équation $y'' + 25y = 0$.
Résoudre ou intégrer une équation différentielle d'ordre $\boldsymbol{n}$, sur un intervalle ouvert $\boldsymbol{K}$, c'est déterminer l'ensemble des fonctions solutions continues et dérivables $\boldsymbol{n\ fois}$ sur $\boldsymbol{K}$ de cette équation.
Chacune des fonctions solutions est une **intégrale particulière** de l'équation et l'ensemble des solutions constitue l'**intégrale générale**.
Il arrive souvent, sauf pour quelques équations particulières, que l'intégrale générale puisse se décrire comme une famille de fonctions dépendant d'un ou de plusieurs paramètres. Les intégrales particulières qui ne peuvent pas s'exprimer par l'intermédiaire de cette expression générale et qui ainsi le

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

singularisent, prennent le nom d'**intégrales singulières** de l'équation.
Dans de nombreux cas, si l'on dispose de l'intégrale générale sous la forme d'une famille de fonctions dépendant de paramètres, on peut déterminer ces paramètres pour obtenir l'intégrale particulière (si elle existe), satisfaisant à certaines conditions, généralement appelées **conditions initiales**. Ces conditions concernent en général les valeurs prises par la fonction ou certaines dérivées pour une valeur x_0 de la variable (problème de Cauchy).
Remarques :

- Il est de coutume pour les équations différentielles de noter y au lieu de $y(x)$ et y' au lieu de $y'(x)$;
- La notion d'intervalle dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentale. En changeant d'intervalle, d'autres solutions peuvent bien être obtenues.

Exemple : Dans l'intervalle $I_1 =]0\,,+\infty[$, l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}$ a pour solutions les fonctions $y(x) = lnx + k$; alors que dans l'intervalle $I_2 =]-\infty\,,0[$, les solutions sont les fonctions $y(x) = ln(-x) + k$ (avec k une constante).
Si aucune précision n'est donnée sur l'intervalle I, on considérera qu'il s'agit de $I = \mathbb{R}$.

- Une équation différentielle est dite linéaire lorsque l'équation sans second membre associée vérifie les deux assertions suivantes :
  - pour toutes fonctions f et g solutions de l'équation sur un intervalle I, la fonction $f + g$ est aussi solution de l'équation sur I ;
  - pout toute fonction f solution de l'équation sur un intervalle I et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est aussi solution de l'équation sur I.

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

Il est à préciser qu'il n'existe pas de méthode mathématique universelle pour résoudre les équations différentielles. Il y a plutôt des méthodes plus particulièrement adaptées à telle ou telle autre équation différentielle. Aussi, il existe des équations différentielles qui résistent encore à tout traitement analytique. Des méthodes d'intégrations approchées sont alors utilisées.
La courbe représentative d'une solution d'une équation différentielle est appelée **courbe intégrale** ou **chronique** de cette équation.
Notons que souvent, quand on parle d'équation différentielle, on sous-entend qu'elle est **ordinaire** (EDO), c'est-à-dire que les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable. Lorsque les fonctions inconnues recherchées dépendent de plusieurs variables, on parle d'**équation aux dérivées partielles** (EDP).

2.2. Quelques types d'équations différentielles

– Equations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients constants, sans second membre

Ce sont les équations du type : $ay' + by = 0$, avec $(a\,,b) \in \mathbb{R}^2$

Les solutions sont de la forme : $y(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

– Equations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients constants avec second membre constant

Ce sont les équations de la forme $ay' + by = c$, avec $(a\,,b\,,c) \in \mathbb{R}^3$

Les solutions s'écrivent : $y(x) = Ke^{-\frac{b}{a}x} + \frac{c}{b}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

– Equations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients constants avec second membre variable

Ce sont les équations de la forme : $ay' + by = f(x)$, avec $(a\,,b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction

Les solutions prennent la forme : $y(x) = Ke^{-\frac{b}{a}x} + p(x)$, avec K une constante et $p(x)$ une solution particulière.

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

2.3. *Exemples de résolution d'équations différentielles*

a) Equations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients constants sans second membre

Ces équations se présentent sous la forme : $ay'' + by' + cy = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

Soit $r \in \mathbb{R}$ et y la fonction : $x \longmapsto e^{rx}$

On a $y' = re^{rx} = ry$ et $y'' = r^2e^{rx} = r^2y$.

On en déduit que $ay'' + by' + cy = ar^2y + bry + cy = (ar^2 + br + c)y$.

y est solution de l'équation si et seulement si : $ar^2 + br + c = 0$.

Par définition, l'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$.

Numérotons l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ (1)

Résolution : Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et z la fonction : $x \longmapsto y(x)e^{\frac{b}{2a}x}$.

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = z(x)e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y'(x) = z'(x)e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}z(x)e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$= \left[z'(x) - \frac{b}{2a}z(x)\right]e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y''(x) = \left[z''(x) - \frac{b}{2a}z'(x)\right]e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}\left[z'(x) - \frac{b}{2a}z(x)\right]e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y''(x) = \left[z''(x) - \frac{b}{a}z'(x) + \frac{b^2}{4a^2}z(x)\right]e^{-\frac{b}{2a}x}$$

On en déduit que $ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow$

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

$$a\left[z''(x)-\frac{b}{a}z'(x)+\frac{b^2}{4a^2}z(x)\right]e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$+b\left[z'(x)-\frac{b}{2a}z(x)\right]e^{-\frac{b}{2a}x}+cz(x)e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$=0$$

$$\left[az''(x)-bz'(x)+\frac{b^2}{4a}z(x)+bz'(x)-\frac{b^2}{2a}z(x)\right.$$

$$\left.+cz(x)\right]e^{-\frac{b}{2a}x}=0$$

$$\left[az''(x)+\left(-\frac{b^2}{4a}+c\right)z(x)\right]e^{-\frac{b}{2a}x}=0$$

$$az''(x)+\left(-\frac{b^2}{4a}+c\right)z(x)=0$$

$$z''(x)+\left(-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)z(x)=0$$

$$z''(x)+\left(\frac{4ac-b^2}{2a^2}\right)z(x)=0$$

$$z''(x)-\left(\frac{b^2-4ac}{2a^2}\right)z(x)=0$$

Numérotons l'équation $z''(x)-\left(\frac{b^2-4ac}{2a^2}\right)z(x)=0$ $\qquad(1')$

On pose $\Delta = b^2-4ac$, le discriminent de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (1).

1er cas : $\Delta = 0$

Les solutions de $(1')$ sont les fonctions $z(x)=Ax+B$ avec $\in \mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation (1) s'écrivent alors : $y(x) = (Ax+B)e^{-\frac{b}{2a}x}$

C'est-à-dire : $y(x)=(Ax+B)e^{rx}$ où r est la solution double de l'équation caractéristique.

2ème cas : $\Delta > 0$

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

Les solutions de $(1')$ s'écrivent $(x) = Ae^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x} + Be^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x}$ avec $\in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation (1) sont alors : $y(x) = Ae^{\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)x} + Be^{\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)x}$
C'est-à-dire : $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
Où r_1 et r_2 sont les solutions réelles de l'équation caractéristique.
3ème cas : $\Delta < 0$
Les solutions de l'équation $(1')$ s'écrivent : $z(x) = Acos\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x + Bsin\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x$ avec $\in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation (1) sont : $y(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(Acos\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x + Bsin\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right)$
C'est-à-dire : $y(x) = e^{\alpha x}(Acos\beta x + Bsin\beta x)$
avec $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les solutions complexes de l'équations caractéristiques.

b) Résolution par la méthode de la variation de la constante

La méthode de variation de la constante, parfois appelée méthode de Lagrange est une méthode de résolution d'équations différentielles avec second membre connaissant la solution de l'équation homogène (sans second membre). Elle trouve son nom de ce que, pour l'essentiel, elle consiste à chercher les solutions sous une forme analogue à celle déjà trouvée pour une équation associée plus simple, mais en remplaçant la (ou les) constante(s) de cette solution par de nouvelles fonctions inconnues. La méthode a été initiée par le mathématicien franco-italien Joseph Louis Lagrange puis généralisée par le mathématicien et physicien français Pierre Simon de Laplace pour la résolution des équations différentielles linéaires.

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre, avec second membre, suivant :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

La solution globale y recherchée est la somme de la solution homogène y_h et de la solution particulière y_p. Soit $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Recherche de la solution homogène :

On considère l'équation homogène associée : $a(x){y_h}'(x) + b(x)y_h(x) = 0$

On peut écrire : $a(x){y_h}'(x) = -b(x)y_h(x) \Leftrightarrow \frac{{y_h}'(x)}{y_h(x)} = -\frac{b(x)}{a(x)}$.

En intégrant, on trouve que :

$\int \frac{{y_h}'(x)}{y_h(x)} dx = -\int \frac{b(x)}{a(x)} dx \Leftrightarrow \ln y_h(x) + C_1 = -\int \frac{b(x)}{a(x)} dx$, avec C_1 une constante.

En prenant l'exponentielle de cette égalité, on trouve que :

$e^{\ln y_h(x) + C_1} = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} \Leftrightarrow y_h(x)e^{C_1} = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$

Ce qui donne encore : $y_h(x) = e^{-C_1}e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} \Leftrightarrow y_h(x) = Ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$, avec $C = e^{-C_1}$ qui est non nulle.

Soit F la primitive présente dans l'exponentiel, on note : $F(x) = \int \frac{b(x)}{a(x)} dx \Leftrightarrow F'(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$.

Ce qui nous donne l'écriture suivante de $y_h(x)$: $y_h(x) = Ce^{-F(x)}$

<u>Recherche de la solution particulière : Utilisation de la méthode de la variation de la constante</u>

L'idée est de supposer que la solution particulière y_p doit être assez proche de la forme de la solution homogène y_h car provenant de l'équation différentielle homogène de la même équation différentielle linéaire. C'est une méthode souvent qualifiée de **méthode à la physicienne**.

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

Afin de rester proche de la forme de la solution particulière y_p, on rend la **constante variable** : $C = C(x)$; d'où le nom de la méthode (variation de la constante).
Ains, on pose : $y_p(x) = C(x)e^{-F(x)}$, dès lors, on a : $y_p'(x) = C'(x)e^{-F(x)} - C(x)F'(x)e^{-F(x)}$

L'équation différentielle linéaire du premier ordre, avec second membre, devient :

$$a(x)\left[C'(x)e^{-F(x)} - C(x)F'(x)e^{-F(x)}\right] + b(x)C(x)e^{-F(x)} = c(x)$$

Soit encore : $a(x)C'(x)e^{-F(x)} - a(x)C(x)F'(x)e^{-F(x)} + b(x)C(x)e^{-F(x)} = c(x)$
On sait que $\left(e^{-F(x)}\right)' = -F'(x)e^{-F(x)}$, ce qui nous permet d'écrire :
$a(x)C'(x)e^{-F(x)} + a(x)C(x)\left(e^{-F(x)}\right)' + b(x)C(x)e^{-F(x)} = c(x)$
En factorisant par $C(x)$, il vient :
$a(x)C'(x)e^{-F(x)} + C(x)\left[a(x)\left(e^{-F(x)}\right)' + b(x)e^{-F(x)}\right] = c(x)$
$y_h(x) = Ce^{-F(x)}$ est solution de l'équation différentielle homogène associée, à savoir :
$a(x)\left(Ce^{-F(x)}\right)' + b(x)Ce^{-F(x)} = 0 \iff C\left[a(x)\left(e^{-F(x)}\right)' + b(x)Ce^{-F(x)}\right] = 0$
Comme C est non nulle, cela signifie que : $a(x)\left(e^{-F(x)}\right)' + b(x)Ce^{-F(x)} = 0$
On obtient donc : $a(x)C'(x)e^{-F(x)} + C(x) \times 0 = c(x) \iff a(x)C'(x)e^{-F(x)} = c(x)$
Il vient : $C'(x)e^{-F(x)} = \frac{c(x)}{a(x)} \iff C'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{F(x)}$

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

En intégrant, on trouve que : $\int C'(x)\,dx = \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{F(x)} dx \quad \Leftrightarrow$
$C(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{F(x)} dx$
La solution particulière prend alors la forme : $y_p(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{F(x)} dx e^{-F(x)}$
Recherche de la solution globale :
La solution globale y de l'équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre est donc, par linéarité, la somme des deux solutions trouvées précédemment.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

A savoir : $y(x) = Ce^{-F(x)} + \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{F(x)} dx\, e^{-F(x)}$
Finalement, en factorisant par $e^{-F(x)}$, on obtient le résultat :

$$y(x) = \left[C + \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{F(x)} dx\right] e^{-F(x)}$$

Ou encore : $y(x) = \left[C + \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} dx\right] e^{-F(x)}$
Dans les trois processus de primitivation, il faut mettre les constantes d'intégration à zéro.
La constante d'intégration C présente dans la solution générale sera déterminée à l'aide d'une condition particulière ou d'une condition initiale.
<u>Exemple</u>
Soit à résoudre l'équation différentielle (E) : $(x + 1)y'(x) + xy(x) = (x + 1)^2$
On a $y'(x) = -\frac{x}{x+1} y(x) + \frac{(x+1)^2}{x+1} = -\frac{x}{x+1} y(x) + (x + 1)$
(E) est définie sur $]-\infty\,, -1[$ et sur $]-1\,, +\infty[$
Résolution de l'équation homogène associée : $y_h{}'(x) = -\frac{x}{x+1} y_h(x)$
On a $-\frac{x}{x+1} = -\frac{x+1-1}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}$.

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

Soit $A(x)$ une primitive de $-\frac{x}{x+1}$, on a : $A(x) = -x + \ln(|x+1|)$.
Les solutions de (E) sont les fonctions $y_h(x) = Ce^{-x+\ln(|x+1|)}$, $C \in \mathbb{R}$.
Soit $y_h(x) = C(|x+1|)e^{-x}$, ou encore : $y_h(x) = C(x+1)e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.
Recherche d'une solution particulière par la méthode de la variation de la constante :
Choisissons une solution de l'équation homogène qui ne s'annule pas : $y_0(x) = (x+1)e^{-x}$.
On cherche la solution particulière sous la forme : $y_p(x) = c(x)y_0(x) = c(x)(x+1)e^{-x}$.

$$c'(x) = \frac{b(x)}{y_0(x)} = \frac{x+1}{(x+1)e^{-x}} = e^x$$

Une primitive de e^x est e^x, donc $c(x) = e^x$ convient.
Finalement, une solution particulière est donnée par : $y_p(x) = e^x(x+1)e^{-x} = x+1$
L'ensemble des solutions de (E) s'obtient en additionnant la solution particulière aux solutions de l'équation homogène. Ce sont donc les fonctions :
$y(x) = (x+1) + C(x+1)e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$

3. Applications dans le programme de physique sénégalais de terminale scientifique

Les équations différentielles sont cruciales pour modéliser des systèmes en physique, tels que les mouvements des corps, la diffusion de la chaleur, les circuits électriques, l'évolution de la population d'une source radioactive, les champs électriques et magnétiques, … Elles permettent de prédire le comportement des systèmes sous diverses conditions.

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

La manière d'étudier les phénomènes physiques à l'aide des équations différentielles se résume généralement en trois étapes :

– identification d'une loi théorique à appliquer au système à étudier ;

– établissement de l'équation différentielle traduisant le phénomène étudié par application de la loi physique (mise en équation) ;

– résolution de l'équation différentielle (ou vérification de solution).

En physique, on s'intéressera particulièrement à des fonctions du temps et donc, aux dérivées temporelles. Nous allons traiter quelques exemples de systèmes physiques, tirés du programme sénégalais de niveau terminal scientifique, et dont l'évolution est régie par une équation différentielle.

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

3.1. En mécanique

3.1.1. Mouvement de chute dans un fluide

Un solide en mouvement de chute dans un fluide est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$:

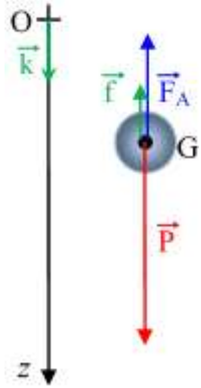


Figure 1 : Mouvement de chute dans un fluide

- à la poussée d'Archimède $\vec{F_A}$: force verticale dirigée de bas en haut et dont l'intensité est égale au poids du fluide déplacé :
  $\vec{F_A} = -m_f \cdot \vec{g} = -\rho_f V \cdot \vec{g}$, où ρ_f est la masse volumique de fluide et V, le volume du fluide déplacé.
- à une force de frottement qui a la même direction que le vecteur vitesse du solide, mais de sens opposé.
  Pour les faibles vitesses, la valeur de cette force de frottement est proportionnelle à la valeur de la vitesse. Pour une sphère de rayon R se déplaçant dans un fluide de coefficient de viscosité η, l'expression de la force de frottement est donnée par la formule de Stokes :
  $\vec{f} = -\, 6\pi\eta R \cdot \vec{v}$

<u>Application du théorème du centre d'inertie</u> :

$\vec{P} + \vec{F_A} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$

Suivant un axe vertical $z'z$ orienté vers le bas, on a $P - F_A - f = ma$

$\Rightarrow mg - \rho_f Vg - 6\pi\eta Rv = m\frac{dv}{dt}$, si ρ est la masse volumique de la substance qui constitue la bille, alors $m = \rho V$ et l'équation devient : $\rho Vg - \rho_f Vg - 6\pi\eta Rv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} + 6\pi\eta R \cdot v = (\rho - \rho_f)Vg$

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

Le volume V d'une sphère de rayon R est donné par l'expression : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Remplaçons dans l'équation ci-dessus : $m\frac{dv}{dt} + 6\pi\eta R \cdot v = (\rho - \rho_f) \times \frac{4}{3}\pi R^3 g$;

$$m\frac{dv}{dt} + 6\pi\eta R \cdot v = \frac{4\pi R^3}{3} g(\rho - \rho_f)$$

Cette équation met en jeu la fonction vitesse $v(t)$ et sa dérivée première $\frac{dv(t)}{dt}$.

3.1.2. Le pendule pesant

On appelle pendule pesant tout système mobile autour d'un axe (Δ) (en principe horizontale), ne passant pas par son centre de gravité et placé dans le champ de pesanteur.

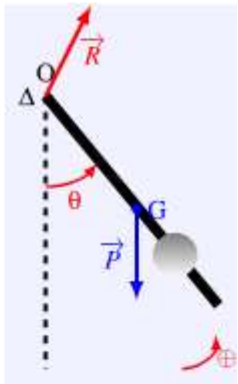


Figure 2 : Pendule pesant

Le système est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$ de l'axe.

Application du théorème de l'accélération angulaire :

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

avec $M_\Delta(\vec{P}) = -P \times OGsin\theta = -mgdsin\theta$ et $M_\Delta(\vec{R}) = 0$

Soit $= -mgdsin\theta = J_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2}$, équivaut à $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{J_\Delta} \cdot sin\theta = 0$

Pour les oscillations de faibles apmlitudes, on a $sin\theta \approx \theta$. Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$$

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

On a une relation entre l'abscisse angulaire $\theta(t)$ et sa dérivés seconde $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$.

4.1.3. Le pendule élastique horizontal

Le pendule est constitué d'un ressort de constante de raideur k relié à un solide (S) de masse m qui porte une plaquette de masse négligeable plongeant dans un fluide.

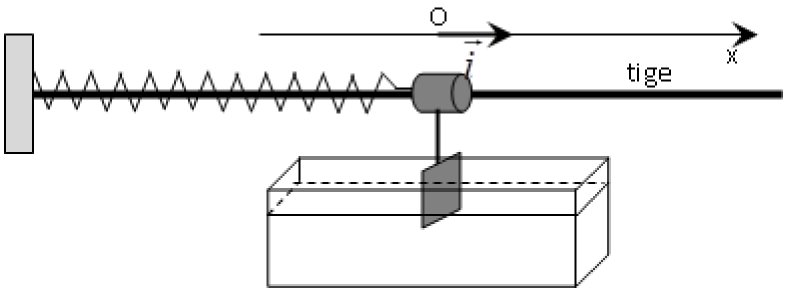


Figure 3 : Pendule élastique horizontal

Le solide (S) est soumis :

– à son poids $\vec{P}$;

– à la réaction $\vec{R}$ exercée par la tige ;

– à la tension $\vec{T}$ exercée par le fil ;

– à la force de frottement fluide (ou visqueux) $\vec{f}$.

Par application du T.C.I., on a $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$.

La projection sur $(O, \vec{\imath})$ donne $-T - f = ma$, soit $-kx - \lambda v = m\frac{d^2x}{dt^2}$.

En remplaçant v par $\frac{dx}{dt}$, il vient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

Cette équation contient la fonction $x(t)$, abscisse du centre d'inertie du solide, sa dérivée première $\frac{dx(t)}{dt}$ et sa dérivée seconde $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$.

3.2. En électricité

3.2.1. Etablissement du courant dans un circuit (R,L)

Considérons le montage ci-contre.
A la

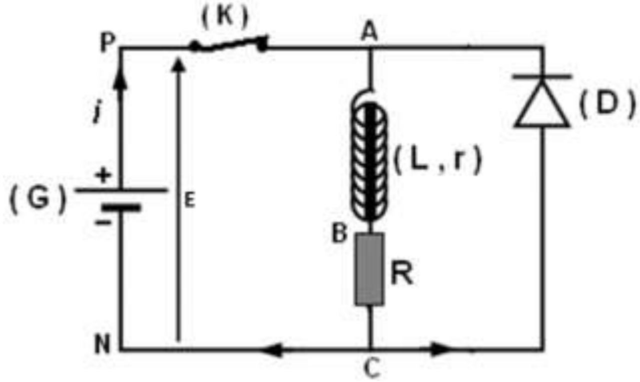


Figure 4 : Etablissement du courant à travers une bobine

fermeture de l'interrupteur K, le générateur délivre un courant i qui traverse la bobine et le résistor.
Ecrivons la loi des tensions :

$u_R + u_L = E$

$u_R = Ri$; $u_L = ri + L\frac{di}{dt}$;

$\Rightarrow L\frac{di}{dt} + (R + r)i = E$, d'où

$$\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = \frac{E}{L}$$

Cette équation lie l'intensité du courant $i(t)$ et sa dérivée première $\frac{di(t)}{dt}$.

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

3.2.2. Charge d'un condensateur

Un condensateur de capacité C est chargé par un générateur de f.e.m. E, à travers un conducteur ohmique de résistance R. (K en position 1)

Lorsque la charge passe de la valeur q à l'instant t à la valeur $q + dq$ à l'instant $+dt$ $(dq > 0)$, on a $i = \frac{dq}{dt}$.

Loi des tensions (convention récepteur pour le condensateur) :

$u_C + u_R = E$, avec $u_C = \frac{q}{c}$ et $u_R = Ri = R\frac{dq}{dt}$

$\frac{q}{c} + R\frac{dq}{dt} = E$, soit

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$$

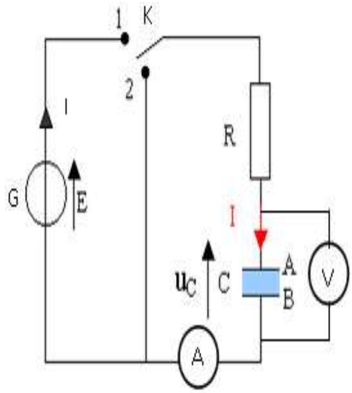


Figure 5 : Charge d'un condensateur

Une relation s'établit entre la fonction $q(t)$ et sa dérivée première $\frac{dq(t)}{dt}$.

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

3.2.3. Circuit (R,L,C) en oscillations libres

Un condensateur de capacité C, initialement chargé à l'aide d'un générateur de f.e.m. E (interrupteur en position 1) est monté en série avec une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, et un conducteur ohmique de résistance R (interrupteur en position 2).

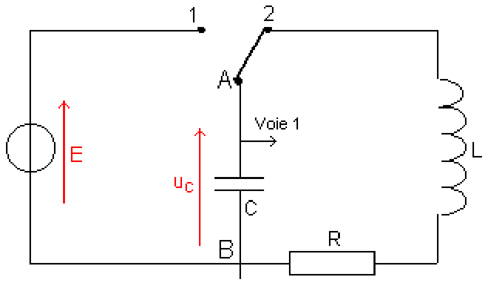


Figure 6 : Circuit (R,L,C) en régime libre

La loi des tensions s'écrit : $u_R + u_L + u_C = 0$ avec $u_R = Ri = R\frac{dq}{dt}$; $u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$; $u_C = \frac{q}{C}$

$\Rightarrow R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$; soit

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Dans cette équation, la fonction $q(t)$, charge du condensateur, est liée à sa dérivée première $\frac{dq(t)}{dt}$ et sa dérivée seconde $\frac{d^2q(t)}{dt^2}$.

3.3. En physique nucléaire : La radioactivité

Soit N le nombre de noyaux d'une source radioactive à l'instant t et $N + dN$ leur nombre à l'instant infiniment voisin $t + dt$. Le nombre de noyaux désintégrés entre les instants t et $t + dt$ est $N - (N + dN) = -dN$. Ce nombre est proportionnel :

- au nombre de noyaux N présents à l'instant t ;
- à la durée dt.

On écrit alors : $-dN = \lambda N dt$ avec λ une constante positive, caractéristique de la nature des noyaux, appelée constante radioactive.

En transposant et en divisant par dt, il vient :

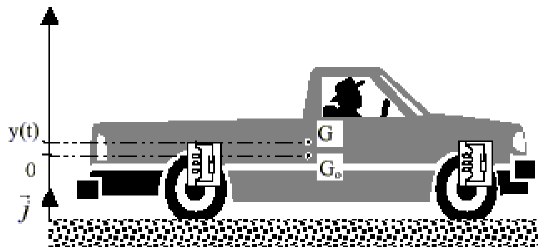
ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$$

La fonction du temps $N(t)$ représentant le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t, est liée à sa dérivée première.

3.4. Un exemple pratique sous forme d'exercice : Amortisseur de véhicule

La suspension d'un véhicule permet d'atténuer les vibrations verticales qui nuisent au confort et à la sécurité des passagers, par exemple lors du passage du véhicule dans un trou sur une route (nid de poule). Elle est constituée au niveau de chaque roue d'un ressort et d'un amortisseur. On note G le centre d'inertie du véhicule.



Lorsqu'on écarte le véhicule de sa position d'équilibre G_o et qu'on le lâche, il oscille autour de cette position. L'amplitude des oscillations décroît suivant le degré d'amortissement de la suspension. L'ensemble du véhicule est équivalent à un oscillateur mécanique unique vertical amorti de masse m, de constante de raideur k.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G seulement suivant la verticale. On repère son ordonnée y sur un axe Oy orienté vers le haut. La position du centre d'inertie du système à l'équilibre G_o (ressorts comprimés) est prise pour origine O de l'axe.

Données :

- Masse : $m = 1{,}5 \cdot 10^3 kg$;
- Constante de raideur du ressort équivalent : $k = 6{,}0 \cdot 10^5 N \cdot m^{-1}$;
- La force de frottement qui s'exerce sur le système de masse m et opposée à la vitesse du point G suivant la

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

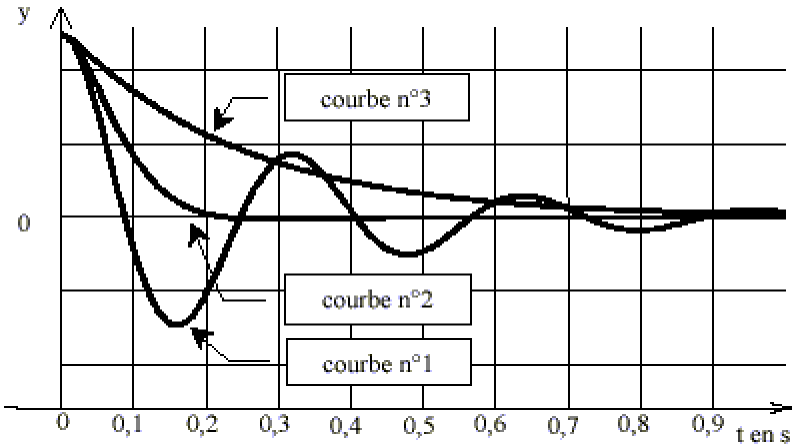
verticale, est de la forme : $\vec{F} = -\lambda v_y \cdot \vec{j}$, avec v_y la coordonnée verticale de la vitesse du point G par rapport à l'axe de la roue et λ une constante positive appelée coefficient d'amortissement ou de frottement.

On s'intéresse par la suite à l'influence de ce coefficient d'amortissement sur la qualité de la suspension.

1° Oscillations libres de la suspension

Le document ci-dessous donne trois courbes représentant $y = g(t)$ pour trois véhicules dont seules les valeurs du coefficient d'amortissement sont différentes :

Courbes	Courbe n°1	Courbe n°2	Courbe n°3
$\lambda(10^4 kg \cdot s^{-1})$	$\lambda_1 = 1{,}5$	$\lambda_2 = 5$	$\lambda_3 = 15$



1.1. Expliquer pourquoi les courbes n°1 et n°3 correspondent respectivement aux coefficients d'amortissement λ_1 et λ_3.

1.2. L'une des courbes du document 1 est une sinusoïde amortie dont on définit la pseudo-période comme étant la durée entre deux maxima consécutifs. Déterminer graphiquement la valeur de cette pseudo-période T.

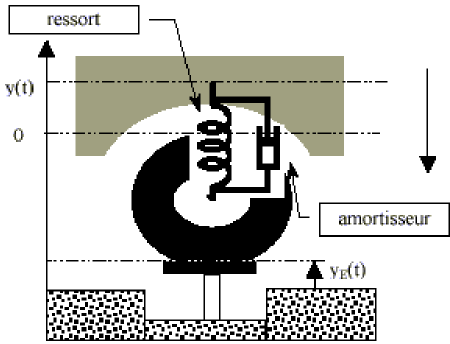
1.3. Le régime critique est le meilleur pour le confort et la sécurité des passagers. Quelle valeur du coefficient

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

d'amortissement convient le mieux parmi les trois valeurs proposées ?

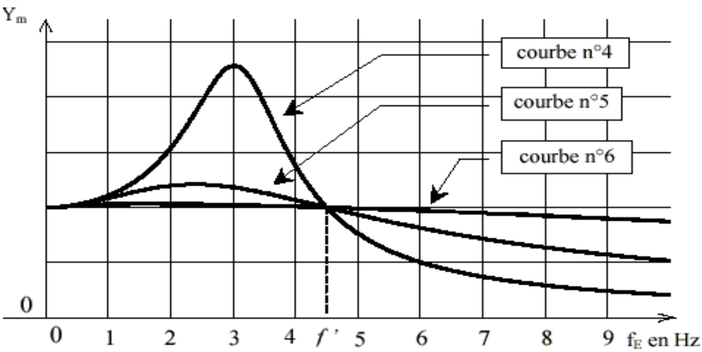
2° Test des amortisseurs, oscillations forcées

Pour tester chacun des amortisseurs, on soumet les roues à une même excitation sinusoïdale produite par un support placé sous chaque roue.



L'amplitude Y_m des oscillations du centre d'inertie G du véhicule dépend alors de deux facteurs : l'amplitude Y_E et la fréquence f_E de l'excitation sinusoïdale. La résolution des questions suivantes ne demande aucune mise en équation. On admettra que le comportement qualitatif du système s'apparente à celui d'un oscillateur amorti soumis à une force excitatrice sinusoïdale.

L'amplitude Y_E de l'excitation sinusoïdale est maintenue constante.



Le document ci-dessus donne les courbes représentant $Y_m = g(f_E)$ pour les trois valeurs du coefficient d'amortissement du paragraphe 1.

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

2.1. Que peut-on dire de l'amplitude Y_m à la résonance ?
2.2. Pour le véhicule équipé de l'amortisseur de coefficient le plus faible, déterminer graphiquement la fréquence de résonance f_r. Comparer sa valeur à la fréquence propre de l'oscillateur mécanique {masse, ressort}. On prend $\frac{1}{\pi} = 0{,}3$.
2.3. Préciser à l'aide des courbes ci-dessus si la fréquence de résonance est fonction du coefficient d'amortissement.
2.4. A la fréquence excitatrice $f' = 4{,}5\,Hz$, l'amplitude des oscillations Y_m est la même pour les trois oscillateurs. Quel amortisseur faut-il choisir pour équiper le véhicule sachant que plus l'amplitude des oscillations est faible, meilleure est la qualité des amortisseurs :
– pour les fréquences excitatrices f_E telles que $f_E < f'$?
– pour des fréquences excitatrices $f_E > f'$?
Quel amortisseur donne le meilleur compromis quelle que soit la fréquence excitatrice ?

<u>Corrigé</u>
1°
1.1. La courbe n°1 représente l'amortissement le plus faible (régime pseudo-périodique), donc elle correspond au coefficient d'amortissement le plus faible λ_1.
La courbe n°3 représente l'amortissement le plus important (régime apériodique), elle correspond au coefficient d'amortissement le plus grand λ_3.
1.2. Il s'agit de la courbe n°1 : on obtient à partir du graphe, la pseudo-période $T = 0{,}32\,s$.
Le régime critique correspond à la courbe 2. Le coefficient d'amortissement est $\lambda_2 = 5 \cdot 10^4 kg \cdot s^{-1}$.
2°
2.1. A la résonance, l'amplitude Y_m passe par un maximum.
2.2. Le coefficient d'amortissement le plus faible correspond à la courbe n°4 : la fréquence de résonance est $f_r = 3\,Hz$.
Calcul de la fréquence propre

ISBN : 978-2-493659-12-5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N° 12 Juin 2025

On a $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ *, donc* $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$*, et* $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ *A.N. :* $f_0 = \frac{0,3}{2}\sqrt{\frac{6,0\cdot 10^5}{1,5\cdot 10^3}}$ *;* $f_0 = 3\ Hz$ *On trouve la même valeur :* $f_0 = f_r$.

2.3. Pour la courbe n°5, la fréquence de résonance est proche de $2,5\ Hz$*, alors qu'elle est de* $3\ Hz$ *pour la courbe n°4 : donc la fréquence de résonance dépend du coefficient d'amortissement.*

2.4.

– pour les fréquences excitatrices f_E *telles que* $f_E < f'$*, la courbe n°6* (λ_3) *correspond à l'amplitude la plus faible et donc au meilleur amortisseur.*

– pour des fréquences excitatrices $f_E > f'$*, la courbe n°4* (λ_1) *correspond à l'amplitude la plus faible et ainsi au meilleur amortisseur.*

La courbe n°5 (λ_2) *(amortissement moyen) correspond à un phénomène de résonance de faible amplitude et au-delà de* f'*, les amplitudes des oscillations sont moins importantes qu'avec un oscillateur très amorti. Cet amortisseur donne le meilleur compromis.*

Ces différents problèmes de physique, relevant de domaines différents, ont en commun l'existence de relations faisant intervenir à chaque fois une fonction et ses dérivées successives ; c'est-à-dire des **équations différentielles**, dont les mathématiciens ont formalisé leurs structures et élaboré des méthodes de résolution, fournissant ainsi aux physiciens un outil performant. Elles sont si importantes en physique-mathématique qu'on dit que « *traiter mathématiquement un problème de physique revient `à trouver l'équation différentielle qui le décrit.* », citation inspirée d'une synthèse de la pensée newtonienne.

4. L'interdisciplinarité mathématiques-physique autour de l'objet de savoir équations différentielles

Selon Lenoir et Sauvé (1998), l'interdisciplinarité

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

consiste en la mise en œuvre de deux ou plusieurs disciplines scolaires […] qui conduit à l'établissement de liens de complémentarité ou de coopération, d'interprétation ou d'actions réciproques entre elles sous divers aspects (finalités, objets d'étude, concepts et notions, démarches d'apprentissage et habiletés techniques, etc.), en vue de favoriser l'intégration des processus d'apprentissage et des savoirs chez les élèves. Elle assure en quelque sorte une dépendance réciproque entre disciplines scolaires et leurs interrelations sur le plan de leurs contenus et de leurs démarches, lesquelles sont nécessaires pour construire la réalité humaine, pour l'exprimer et pour interagir avec elle. La présentation que nous avons faite sur les équations différentielles et les applications en physique que nous avons illustrées, montrent la complexité du lien entre les mathématiques et la physique et la nécessité d'aborder les enseignements-apprentissages sur les équations différentielles et les notions physiques connexes par une approche interdisciplinaire. Les programmes sénégalais actuellement en vigueur sont orientés selon l'Approche par compétences (APC). Cette rénovation renforce encore la nécessité s'inscrire dans une dynamique didactique et pédagogique permettant de briser les barrières disciplinaires. L'interdisciplinarité doit constituer un levier fondamental pour réussir une intégration des acquis chez les apprenants.

Pour une réelle opérationnalisation de la pédagogie de l'intégration des acquis, il faut d'abord une formation initiale et continue des enseignants à une pédagogie de l'interdisciplinarité. Des ateliers interdisciplinaires peuvent être organisés et des supports pédagogiques conçus ensemble entre professeurs, formateurs et inspecteurs des deux disciplines. Des séances de cours, de travaux dirigés et de travaux pratiques co-animées par le professeur de mathématiques et celui de physique, permettraient de faire le point sur d'éventuelles nuances. En effet, les équations différentielles peuvent se

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

présenter différemment selon le contexte mathématique ou physique. Les lettres et symboles ainsi que leurs significations, les méthodes ou techniques de résolution, la présentation des solutions, entre autres peuvent être différents d'une discipline à l'autre. Aussi, en physique, des méthodes de résolution non analytiques sont parfois utilisées. Il s'agit de méthodes approchées ou numériques lorsque les solutions exactes sont inaccessibles (méthode d'Euler, méthode de Runge-Kutta). Pour assurer une bonne complémentarité au cours de ces séances communes, des situations-problèmes interdisciplinaires pertinents pourraient être de bons déclencheurs et stimulateurs. Le professeur de mathématiques pourrait prendre en charge particulièrement les raisonnements théoriques et le professeur de physique les interprétations scientifiques. Cela éviterait la disjonction des apprentissages et exposerait les liens entre théorie et pratique, car les équations ne doivent pas être perçues par les apprenants comme de simples techniques de calcul ou outils de travail d'esprit, déconnectés de toute réalité physique. Pour aller plus loin, des sujets d'évaluation communs mobilisant des compétences en mathématiques et en physique pourraient être conçus afin d'offrir aux apprenants de véritables opportunités de situations d'intégration à partir de problèmes complexes. Cette dynamique permettrait d'harmoniser les progressions ainsi que les approches, tout en respectant la spécificité de chaque discipline.

Au niveau institutionnel, les programmes pourraient être orientés vers le mode d'intégration que Roegiers appelle « regroupement de disciplines en thèmes intégrateurs ». Il s'agit d'une forme d'intégration qui, pour des disciplines qui poursuivent des objectifs complémentaires, exploite cette complémentarité en fusionnant les apprentissages relatifs à ces disciplines à l'occasion de modules que l'on construit pour l'apport des différentes disciplines. (Rogiers, 2001, p-111)

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

L'interdisciplinarité mathématiques-physique constitue une source d'enrichissement mutuel. Les mathématiques mettent à la disposition de la physique les équations différentielles comme un langage essentiel et indispensable pour le traitement de ses problèmes. En retour, les exigences en physique inspirent de nouvelles techniques de résolution mathématiques et par conséquent, posent de nouveaux défis.

Conclusion

Ces exemples d'équations différentielles traitées et les illustrations de leurs applications qui constituent des cas d'école extraits des programmes sénégalais des classes de terminales scientifiques prouvent combien les équations différentielles sont indispensables en physique. Elles offrent un cadre unifié pour modéliser et prédire plusieurs phénomènes naturels. Elles sont incontournables même dans le domaine de la recherche pour des avancée majeures dans plusieurs domaines de la physique. En retour, la forte implication des équations différentielles dans les processus d'apprentissage et de recherche en physique met en exergue la face concrète des mathématiques souvent éclipsée par l'aspect abstrait. La maîtrise des équations différentielles est cruciale pour réussir les enseignements-apprentissages des programmes de physique, mais aussi pour percer dans la recherche. Cette maitrise nécessite que les enseignements-apprentissages soient arrimés à une approche interdisciplinaire bien structurée et planifiée entre enseignants de mathématiques et de physique. C'est la raison pour laquelle la collaboration entre collègues des deux disciplines est fortement recommandée pour l'exécution des programmes particulièrement sur les équations différentielles et les savoirs physiques connexes. L'interdisciplinarité mathématiques-physique autour des équations différentielles est un bel exemple paradigmatique de synergie entre théorie et pratique. Les équations différentielles

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

doivent jouer à la fois le rôle de croie de transmission et de crémaillère entre les mathématiques et la physique. Pendant que la physique bénéficie d'un outil puissant et incontournable, les mathématiques trouvent une source de problèmes stimulants avec continuellement de nouveaux défis qui motivent de nouvelles théories conduisant à élargir le champ des mathématiques.

Références bibliographiques

Bing, T. J., & Redish, E. F. (2009). Analyzing problem solving using math in physics: Epistemological framing via warrants. *Physical Review Special Topics – Physics Education Research*, *5*(2). https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.5.020108

Boniolo, G., Budinich, P., & Trobok, M. (2005). The Role of Mathematics in Physical Sciences — Interdisciplinary and Philosophical Aspects. *In G*.

Bunge, M. (1973). Philosophy of physics. Dordrecht, Holland: D. *Reidel Publishing Company*.

Kane, S., Ndiaye, P., Dia, S. (2024). *PHYSIQUE Term S*. Collection KANDIA, Edition Clairafrique, 401 p.

Lenoir, Y., Sauve, L. (1998). L'interdisciplinarité et la formation à l'enseignement primaire et secondaire : quelle interdisciplinarité pour quelle formation ? *Revue des sciences de l'éducation*, volume 24, Numéro 1, pages 3-29, 24(1),3-29.

Ministère de l'Education Nationale/ Inspection Générale de l'Education et de la Formation/ Mathématiques (2006). *Programme de mathématiques.*

Ministère de l'Education Nationale/ Inspection Générale de l'Education et de la Formation/ Sciences Physiques (2008). *Programme de sciences physiques.*

Robine, F. (2017). *Construction des croisements didactiques en Mathématiques et Physique-Chimie au collège*.

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025

Séminaire, Plan national de formation, Professionnalisation des acteurs de la formation, Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, République française.

Roegiers, X. (2001). *Une pédagogie de l'intégration. Compétence et intégration des acquis dans l'enseignement*. Bruxelles : De Boeck Université, 306 p.

Saglam, A. (2004). Thèse : *Les Equations Différentielles en Mathématiques et en Physique*. Laboratoire Interdisciplinaire de Didactique des Sciences Expérimentales et des Technologies (LIDSET). Université Joseph Fourier de Grenoble.

Taïrou, A. ; Barry, A-K. ; Kouadio, J. ; Razafindranovona, O-T. ; Rey, P. ; Sanhouidi, J. ; Traoré, S. ; Tsoumtousa, J. (1999). *MATHEMATIQUES Terminale SM*. Collection InterAfricaine de Mathématiques. EDICEF, 352 p.

Webographie

https://www.chimix.com/ifrance/devoirs/t029.htm consulté le 17 Mai 2025 é 11h 35 min.

ISBN : 978-2-493659-12- 5 COLLECTION RECHERCHES & REGARDS D'AFRIQUE VOL 4 N ° 12 Juin 2025